

Rallye IREM de Haute-Normandie

Terminales et Bac +1

Voici 13 défis classés par ordre de difficulté croissante. Vous devez en résoudre exactement 7. Les points attribués à un défi dépendent de sa difficulté.

Ces défis proviennent de la réflexion des auteurs, des *Jeux mathématiques du Monde*, de *tangente Education* n°25 et du livre *Oh, les maths!* de Yakov Perelman.

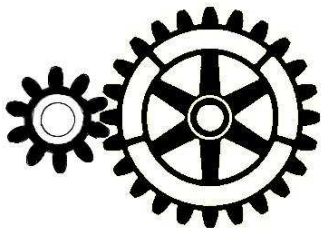
PRECISIONS POUR LES PARTICIPANTS :

1. Les élèves s'organisent comme ils le souhaitent pour travailler en groupe. Le professeur est présent mais n'intervient à aucun moment sauf éventuellement pour aider les élèves à s'organiser.
2. Seul le matériel suivant est autorisé : règle, compas, équerre, rapporteur, dictionnaire, ciseaux, colle, trombones, feuilles de brouillon, papier millimétré ou quadrillé, calques, calculatrices programmables, agrafeuses, crayons de couleur, feutre, ruban adhésif. En revanche, les cours, les manuels et les connexions Internet ne sont pas autorisés.

CHALLENGE 1

The participants to a conference have all shook hands and one of them has counted there were a total of sixty-six handshakes.
How many people have attended this conference?

The handshakes



DÉFI 2

Les engrenages

Une roue à 8 dents s'engrène dans une autre à 24 dents. Lorsque la grosse roue tourne, la petite tourne autour d'elle.
Combien de fois la petite roue aura-t-elle tourné autour de son axe lorsqu'elle aura effectué un tour complet de la grosse?

DÉFI 3

La traversée du pont

Quatre personnes doivent traverser un pont en 17 minutes. Chacune d'entre elles marche à une vitesse maximale donnée. Appelons 1, la personne qui peut traverser le pont en 1 minute, 2 celle qui le traverse en 2 minutes, 5 celle qui le fait en 5 minutes et 10 celle qui le traverse en 10 minutes.

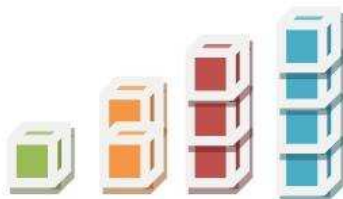
Ces quatre personnes n'ont en tout qu'une torche et il est impossible de traverser le pont sans torche. Le pont ne peut supporter que le poids de 2 personnes.

Dans quel ordre doivent traverser ces quatre personnes?

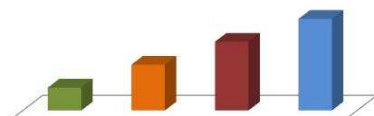
DÉFI 4

Le damier

On dispose d'un damier (4 lignes et 4 colonnes) et de 40 cubes de 4 couleurs : 4 cubes verts, 8 cubes oranges, 12 cubes rouges et 16 cubes bleus. On les emboîte les uns au dessus des autres afin d'obtenir 4 fois chaque colonne ainsi représentée :



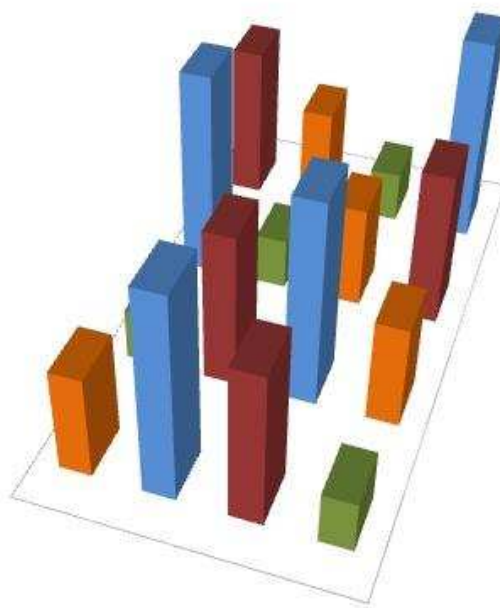
ou en perspective



On place sur le damier ces 16 colonnes de cubes et on relève le nombre de couleurs visibles en se plaçant sur chaque côté du damier. Sur chaque ligne et chaque colonne doit figurer une seule fois chaque type de colonnes.
Par exemple :

	2	3	3	1	
2					1
1					2
3					2
2					3
	2	1	2	4	

ou en perspective



Placer les 16 colonnes de cubes sur le damier suivant en respectant les éléments indiqués :

		2			
4					
					2
		1			

DÉFI 5

Le facteur

Un facteur doit distribuer le courrier dans une rue. Celle-ci ne comporte qu'une seule rangée de maisons régulièrement espacées et numérotées 1, 2, ..., n où n est un entier supérieur ou égal à 2.

Le facteur doit distribuer une lettre par maison. Pour cela, il commence par laisser son vélo à la maison 1 et y dépose la lettre correspondante, puis il distribue les autres lettres dans les autres maisons, et revient enfin à la maison 1 récupérer son vélo.

Il effectue ainsi un trajet représenté par les numéros successifs des maisons où il a déposé le courrier.

Par exemple, si $n = 5$, un trajet possible est 1, 5, 2, 4, 3, 1.

Combien y a-t-il de trajets possibles ?

DÉFI 6

Le kayak

Jeannot met 2 heures en kayak pour descendre la rivière et 3 heures pour faire le trajet retour en pagayant à la même allure.

Combien de temps aurait-il mis pour couvrir la même distance totale, toujours à la même allure, mais sur un lac ?

DÉFI 7

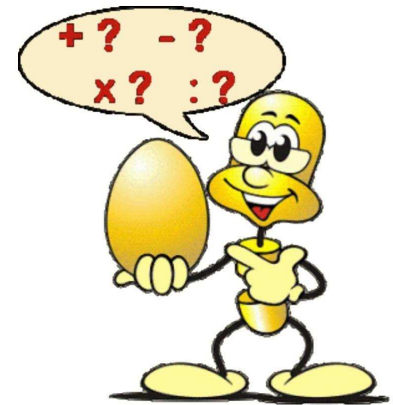
Dans son autobiographie, Stendhal raconte les souvenirs de ses années d'études :
"Je trouvai chez lui [M. Chabert, professeur de mathématiques] un bouquin d'Euler et son problème sur le nombre d'œufs qu'une paysanne apportait au marché ... Cela m'ouvrit l'esprit, j'entrevis ce que c'était que se servir de l'instrument nommé algèbre. Du diable si personne me l'avait jamais dit ..."

Voici ce problème, extrait de l'Introduction à l'algèbre d'Euler, qui avait tant impressionné le jeune Stendhal :

Deux paysannes ont apporté au marché ensemble 100 œufs. L'une d'elles avait un plus grand nombre d'œufs que l'autre, mais toutes les deux ont reçu la même somme. La première a dit alors à la seconde : "Si j'avais eu tes œufs, j'aurais reçu 15 kreutzers". L'autre a répondu : "Et si moi, j'avais eu tes œufs, j'aurais reçu 6 kreutzers et 23".

Combien d'œufs avait chaque paysanne ?

Le problème d'Euler



DÉFI 8

On connaît les nombres premiers et le crible d'Erathostène. Voici un procédé qui permet de déterminer ce que sont ces nombres seconds.

« On considère les nombres entiers strictement plus grands que 1. Le deuxième de ces nombres est le premier nombre second. Le nombre second suivant est le deuxième entier non divisible par un nombre second déjà trouvé et plus grand que ceux déjà trouvés.

On recommence l'opération tant que cela est possible.»

Quel est le vingtième nombre second ?

Les nombres seconds

DÉFI 9

Monsieur Pierre Dubonnet a obtenu le sujet du rallye des mathématiques 2015 le 14 Mars et veut le porter à ses amis Andreï Andropov de Moscou, William Smith de Denver et Asahi Ikari de Tokyo.

Il réserve ses billets d'avion et voici les indications communiquées :

Date de départ : le 14 mars 2015.

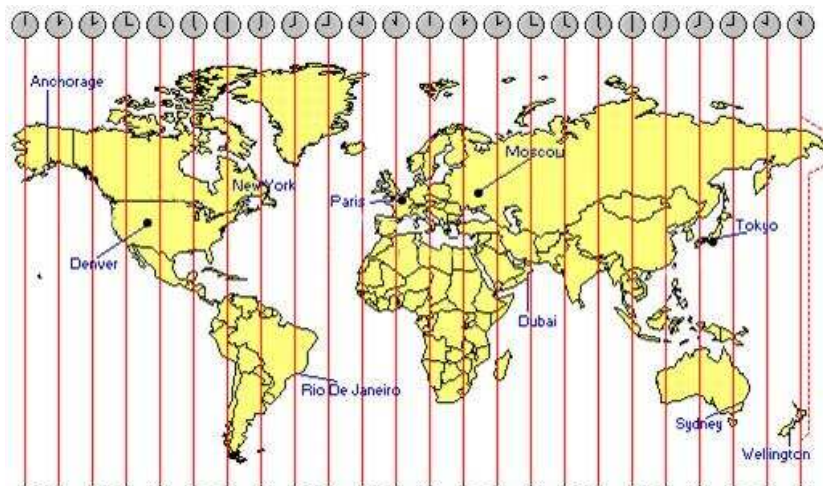
Vol Paris Moscou : départ 14h25 ; Durée du de vol : 3h40

Le même jour : Vol Moscou Denver : Départ 22h45 ; Durée du vol : 11h

Le lendemain : Vol Denver Tokyo : Départ 12h15 ; Durée du vol : 12h15.

En tenant compte des décalages horaires, quels amis de Pierre auront le sujet pour faire l'épreuve le lundi 16 mars à 14h ?

Bon voyage monsieur Dubonnet



Pour répondre à cette question, vous devrez compléter le tableau se trouvant sur la feuille réponse.

DÉFI 10**Toujours plus haut**

Cette rampe d'accès à un parking possède une structure en hélice et tourne exactement 5 fois autour de l'espace central qui a la forme d'un cylindre de hauteur 20 mètres et de largeur 10 mètres.

Quel est la longueur de la rampe qui se trouve à 20 cm du cylindre central et qui suit la rampe sur toute sa longueur ?

**DÉFI 11****Le nombre du bonheur**

Le nombre du bonheur est un nombre à 4 chiffres qui est égal à la somme des puissances quatrièmes de ses chiffres. Il ne commence pas par 0.

Quel est le nombre du bonheur ?

DÉFI 12**Retouche d'image**

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du noir au blanc en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un nombre x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le noir ;
- $x = 1$ pour le blanc ;
- x varie de 0 à 1 pour toutes les nuances de gris intermédiaires (allant de 0 à 1 avec un pas de $\frac{1}{255}$, du foncé au clair).



Une image est composée de pixels et donne des nuances de gris avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».

Une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée 0,22 prendra la nuance codée $0,22^2 = 0,0484$ par application de cette fonction de retouche.

On donne la fonction f définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$.

Un utilisateur prend la première image en niveau de gris qu'il trouve sur la carte de son appareil numérique, prise sur son dernier lieu de vacances. Il remarque, par un histogramme des niveaux de gris, que toutes les teintes allant du noir au blanc figurent sur l'image.

Combien de niveaux de gris seront visibles sur l'image s'il applique un très grand nombre de fois la fonction de retouche décrite ci-dessus sur cette image ?

DÉFI 13**Les deux boîtes de café**

Deux boîtes entièrement remplies de café ont la même forme et sont faites du même fer blanc. La première pèse 2 kg et sa hauteur est de 12 cm ; la seconde a 9,5 cm de hauteur et pèse 1 kg.

Quel est le poids net du café dans chaque boîte, au gramme près ?