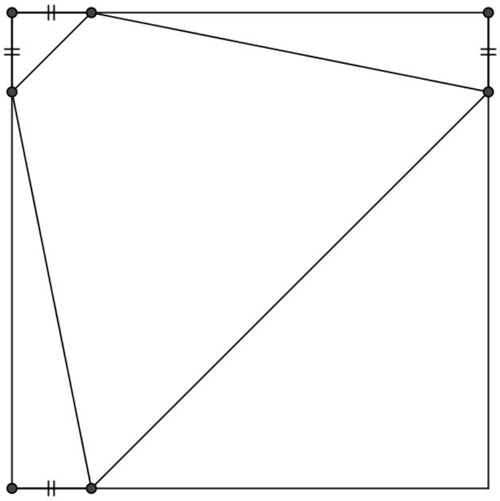
Rallye Mathématique de Haute-Normandie
XVI^{ème} édition
Classes de 3èmes/Classes de 2ndes professionnelles et générales
Epreuves qualificatives

14 Mars 2016

Voici 11 défis classés par ordre de difficulté croissante. Vous deviez en résoudre **exactement 7**. Les points attribués à un défi augmentent avec sa difficulté.
Ces défis proviennent de la réflexion des auteurs, un défi vient du livre « Enigmes mathématiques machiavéliques » de Sylvain Lhullier, ed. Marbout, Jeux mathématiques du Monde, un autre du rallye mathématique transalpine, un enfin des olympiades de mathématiques.

1er défi

Pour se détendre, certains sportifs olympiens découpent dans une feuille de papier de forme carrée, des cerfs-volants ayant la forme d'un trapèze isocèle (voir la figure ci-dessous).
Quel est le rapport de l'aire du trapèze à celle du carré ?



Réponse : L'astuce consiste à calculer l'aire non pas du trapèze, mais des surfaces qui se trouvent à l'extérieur du trapèze : si on appelle x la longueur du petit segment marqué de 2 petits traits et a la longueur d'un des côtés du carré, l'aire du petit triangle en haut à gauche est égale à $\frac{x*x}{2}$, celle du triangle en haut à droite à $\frac{x(a-x)}{2}$ (et il y en 2 comme ça) et enfin l'aire du grand triangle en bas à droite est égale à : $\frac{(a-x)^2}{2}$

Soit en tout : $\frac{x*x}{2} + 2*\frac{x(a-x)}{2} + \frac{(a-x)^2}{2} = \frac{a^2}{2}$

Comme l'aire du carré est égale à a^2 , le rapport est de **1/2**

$2^{ème}$ défi – cyclisme sur route

Saïd monte un col à vélo. Il roule à 15 km/h. Puis il redescend 3 fois plus vite.
Sachant qu'il met 1h36min à faire l'aller-retour, quelle est la distance entre le pied du col et le sommet ?

Réponse : si il redescend 3 fois plus vite, c'est qu'il descend à 45 km/h et qu'il met 3 fois moins de temps à descendre qu'à monter. Donc sur les 96' de son parcours, il en a utilisé 24 à descendre et 72 à monter. Pour la descente, il a mis 24' à 45 km/h, il a donc parcouru : $\frac{45*24}{60}$ soit **18 km.**

Vérification : pour la montée : 18 km à 15 km/h : il faut : 1h 1/5ème d'heure soir 1h12 (72' : c'est bon)

$3^{ème}$ défi - Après le sport : réconfort !

Après les J.O., une fédération organise un banquet dans une grande salle, dans laquelle on dispose de nombreuses tables. Il y aura 20 tables, toutes identiques et elles ont une particularité : elles sont carrées mais on peut doubler l'une de leurs dimensions grâce à un système de rallonges.

Chaque table est recouverte d'une nappe. Les nappes retombent de 25 cm sur les 4 côtés lorsque les tables sont rectangulaires, et de 65 cm sur chacun des deux côtés où les rallonges sont rentrées, quand elles sont carrées.

Le tissus dans lequel seront coupées les nappes est vendu en largeur 2,60 m : quelle longueur de tissus faut-il acheter pour qu'il y ait le moins de chutes possible ?

La mise en équation provient de deux données :

- Quand les tables sont rectangulaires, les longueurs sont le double de la largeur,
- Quand les tables sont rectangulaires, les nappes mesurent 50cm (2 fois 25) de plus que la longueur de la table et quand elles sont carrées, elles sont plus grandes de 130cm (2 fois 65) que le côté de la table,d'où l'équation – en appelant x le côté de la table (carrée) :

$2x + 50 = x + 130$
qui donne :
$x = 80$cm

Par conséquent, pour une table, il faut un morceau de tissus qui mesure (80+50) par (80+130)
soit 130 cm X 210 cm

Pour 20 tables, pour optimiser les chutes (il n'y en aura pas du tout du coup, 130 étant la moitié de 260) : il faut 20/ 2, donc 10 fois 210cm soit 21 mètres de tissus.

$4^{ème}$ défi : cyclisme sur piste

Lors d'un championnat de poursuite, deux cyclistes partent en même temps de deux points diamétralement opposés d'un vélodrome de 250m de tour et dans le même sens. Le vainqueur a rattrapé son rival après avoir parcouru exactement huit tours.

Le perdant a couru à la vitesse moyenne de 54 km/h. A quelle vitesse a couru le vainqueur ?

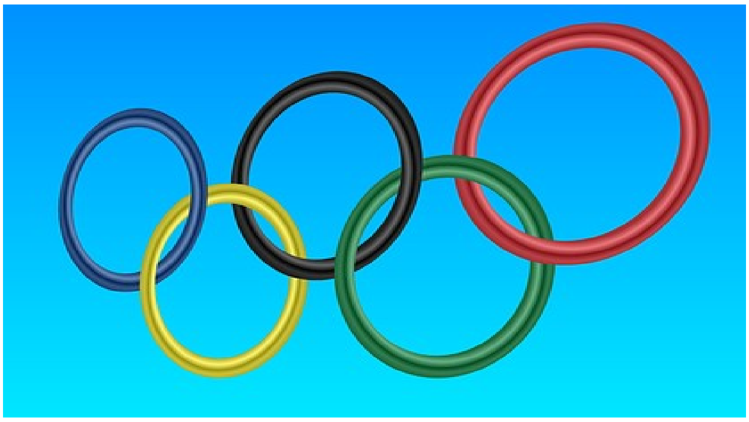
Réponse : le perdant ayant été rattrapé par l'autre coureur, il a parcouru un demi-tour de moins soit 7,5 tours. Le rapport des vitesses est donc de 8/7,5. Le vainqueur a donc couru à la vitesse de :

$$54*(8/7,5) = 57,6 \text{ km/h}$$

5ème défi - 2016 = année Olympique !

Reconnaissez-vous les anneaux olympiques ? Savez-vous que ces cinq anneaux entrelacés représentent les cinq continents unis par l'olympisme ? Mais il y a une façon plus mathématique de les regarder : à eux-5, ils créent 9 zones disjointes. Les chiffres de 1 à 9 (tous différents) sont mis dans les régions déterminées par les 5 anneaux olympiques de telle sorte que dans chaque anneau la somme soit égale à 11.

Comment sont-ils placés ?



Combien y a-t-il de solutions ?

Réponse :

Il y a 2 catégories de cercles : ceux où il y a 3 sous-ensembles (le jaune, le noir et le vert et ceux ù il n'y en a que 2 (le bleu et le rouge)

Quand on décompose le nombre 11 en 2 nombres compris entre 1 et 9, il n 'y a que les possibilités : 2+9, 3+8, 4+7, 5+6.

Quand on décompose le nombre 11 en 3 nombres compris entre 1 et 9, il n'y a que les possibilités : 1+2+8, 1+3+7, 1+4+6, 2+3+6, 2+4+5. (Soit 9 possibilités) .

On voit donc déjà que le 9 est obligatoirement dans un cercle extérieur : imaginons : le bleu (il pourrait être dans le rouge, mais à une symétrie près, ça ne change rien)

Autre argument intéressant : les 2 cercles du bas sont disjoints donc la somme des 6 chiffres qui s' y trouvent est égale à 22. Et il faut choisir 2 sommes à 3 chiffres parmi les 4 sommes ci-dessus, mais il faut qu'elles soient disjointes. Or 3 d'entre elles ont en commun le 2. donc il y a nécessairement 1+3+7 ou 1+4+6.

SI il y a 1+3+7, il y a 2+4+5 dans l'autre cercle

Si il y a 1+4+6, il y a : aucune possibilité (il y a toujours un nb en commun sinon)

Donc ça y est : dans les 2 cercles du bas : il y a 1+3+7 et 2+4+5 et on sait que c'est dans le jaune qu'il y a 2+4+5 car on sait déjà qu'il y a le 2.

Donc dans le jaune, il y a 2,4 puis 5 ou 2, 5 puis 4,

et dans le vert, il y a 1, 3 et 7.
En étudiant rapidement les possibilités, il vient :
2, 5, 4 dans le jaune
du coup il manque 7 en 2 nombres dans le noir, et comme dans le vert, il y a 1,3 et 7, c'est que le nombre en commun entre le vert et le noir est le 1.
On a donc pour l'instant (toujours de la gauche vers la droite) :

9-2-5-4-6-1-7-3 et donc 8.

Il n'y a donc que 2 solutions (par symétrie) :

9-2-5-4-6-1-7-3-8 et 8-3-7-1-6-4-5-2-9

6ème défi – BRRRHHHHH !

Je suis aux sports d'hiver : je me trouve sur un télécabine où toutes les cabines sont numérotées de 1 en 1 : je suis dans la cabine n°130 ! Quand je croise la cabine n°110, je téléphone à mon amie : elle me dit qu'elle est dans la cabine n° 250 et qu'elle croise la cabine n° 290.

Est-ce possible ? Si oui, combien y a-t-il de cabines en tout ?

Réponse :
Oui, c'est possible : si je croise la 110 en étant dans la 130, c'est qu'à l'extrémité du télécabine, se trouve la cabine n° 120. Derrière moi, il y a 119 cabines puisque mon amie est dans la 250 (et 250-131 = 119). Par conséquent, de l'autre côté, il y a le même nombre de cabines – 119 – entre la cabine 290 et la cabine 110. Ces cabines sont donc numérotées de 291 à 300 puis de 1 à 109.
En tout, il y a donc 300 cabines !

7ème défi - Rallye : mathématique ? Non : automobile ! Oui. Enfin, ça dépend...

Patrick participe à un long rallye automobile et est en train de préparer sa voiture.
Il sait que chaque pneu peut tenir 12 000 km et il ne peut en prendre que 7 en tout.
Combien de kilomètres va-t-il pouvoir parcourir ?

Réponse :
chaque pneu peut faire 12000 kms et on en a, donc a priori on peut faire 7*12000 = 84000 kms, oui mais voilà : il faut mieux avoir 4 pneus en même temps....
Donc la réponse est : $\frac{84000}{4} = 21000\,kms$

Exemple de méthode pour faire ces 21000 kms :

Numérotons les pneus de 1 à 7.
Il parcourt 9 000 km avec les pneus de départ (pneus numéro 1, 2, 3 et 4) Puis il en change 3 (il garde par exemple le pneu numéro 1 et roule ainsi avec les pneus 1-5-6-7) et parcourt ainsi 3 000 km.
Il change alors le pneu numéro 1 (qui a déjà parcouru les 12 000km) et le remplace par le numéro 2.
Il parcourt ainsi 3 000 km puis change le pneu numéro 2 (qui est maintenant arrive à usure) par le numéro 3 et parcourt de nouveau 3 000 km avant de remplacer le numéro 3 par le numéro 4.
Tableau récapitulatif :
Le pneu numéro 1 roule pendant 9000 + 3000 + 0 + 0 + 0 = 12 000km

Le pneu numéro 2 roule pendant 9000 + 0 + 3000 + 0 + 0 = 12 000km
Le pneu numéro 3 roule pendant 9000 + 0 + 0 + 3000 + 0 = 12 000km
Le pneu numéro 4 roule pendant 9000 + 0 + 0 + 0 + 3000 = 12 000km
Le pneu numéro 5 roule pendant 0 + 3000 + 3000 + 3000 + 3000 = 12 000km
Le pneu numéro 6 roule pendant 0 + 3000 + 3000 + 3000 + 3000 = 12 000km
Le pneu numéro 7 roule pendant 0 + 3000 + 3000 + 3000 + 3000 = 12 000km

et il a ainsi parcouru en tout 21000 km.

8ème défi : C'est pas juste !!!

Dans ce concours, trois candidats s'affrontent lors de trois épreuves. Voici leurs points :

	Epreuve 1	Epreuve 2	Epreuve 3
André	65	75	40
Bernard	35	50	70
Charlotte	50	40	60

Si on faisait le total des trois résultats, le verdict serait sans appel : André l'emporterait devant Bernard et Charlotte. Seulement, voilà : une directive secrète exige que le gagnant soit une femme, donc Charlotte doit absolument être déclarée vainqueur ! Le directeur du concours s'appuie donc sur le fait que les coefficients n'ont pas été publiés pour parvenir au résultat souhaité. Mieux : le classement est inversé.
Quels coefficients (*entiers et au moins égaux à 1*) le directeur a-t-il choisis pour chaque épreuve ?
Il n'y a pas d'ex-aequo et le total des coefficients doit être le plus petit possible.

Réponse:

	Epreuve 1	Epreuve 2	Epreuve 3	TOTAL
André	65	75	40	180
Bernard	35	50	70	155
Charlotte	50	40	60	150

L'ordre des notes est le suivant : André : 1-1-3 Bernard : 3-2-1 Charlotte : 2-3-2
Donc pour avantager Charlotte ; il faut coefficienter fortement l'épreuve 3 et très faiblement l'épreuve 2 : on n'a donc qu'à commencer par poser : B=1
Ensuite, entre André et Bernard : Bernard n'a battu André que sur l'épreuve 3 donc il faut que C soit élevé.
Donc a priori : 1=B < A <C
En essayant plusieurs valeurs sur Excel, on obtient le classement souhaité pour :
A= 5 ; B = 1 ; C = 6 (André a alors : 640, Bernard 645 et Charlotte 650
Dernière question : est-ce qu'on peut obtenir le même classement avec une somme de coefficients moins forts :
Il n'y en a pas tant que ça à essayer (d'autant plus qu'on sait que B doit être le plus faible possible (Charlotte est arrivée dernière) donc B= 1. On sait aussi que c'est C le plus grand.
Il ne reste que les possibilités suivantes :
1-1-2 1-1-3 1-1-4 1-1-5 1-1-6 1-1-7 1-1-8 1-1-9 1-1-10
2-1-2 2-1-3 2-1-4 2-1-5 2-1-6 2-1-7 2-1-8 2-1-9
3-1-3 3-1-4 3-1-5 3-1-6 3-1-7 3-1-8
4-1-4 4-1-5 4-1-6 4-1-7
5-1-5 5-1-6
Essayons toutes ces possibilités :

A	B	C	ANDRÉ	Bernard	CHARLOTTE		
1	1	2	220	225	210	4	NON
1	1	3	260	295	270	5	NON
1	1	4	300	365	330	6	NON
1	1	5	340	435	390	7	NON
1	1	6	380	505	450	8	NON
1	1	7	420	575	510	9	NON
1	1	8	460	645	570	10	NON
1	1	9	500	715	630	11	NON
2	1	2	285	260	260	5	NON
2	1	3	325	330	320	6	NON
2	1	4	365	400	380	7	NON
2	1	5	405	470	440	8	NON
2	1	6	445	540	500	9	NON
2	1	7	485	610	560	10	NON
2	1	8	525	680	620	11	NON
3	1	3	390	365	370	7	NON
3	1	4	430	435	430	8	NON
3	1	5	470	505	490	9	NON
3	1	6	510	575	550	10	NON
3	1	7	550	645	610	11	NON
4	1	4	495	470	480	9	NON
4	1	5	535	540	540	10	NON
4	1	6	575	610	600	11	NON
4	1	7	615	680	660	12	NON
5	1	5	600	575	590	11	NON
5	**1**	**6**	**640**	**645**	**650**	**12**	**OUI**

9ème défi - Tournoi de tennis

Le règlement d'un tournoi de tennis simple femmes, gagné par Anne-Marie est assez particulier. Il stipule qu'une joueuse peut continuer à jouer après avoir subi 1 défaite, mais si elle perd un deuxième match pendant le tournoi, elle est alors éliminée. Avant chaque tour, un ordinateur choisit au hasard certaines gagnantes du tour précédent qui seront dispensées de jouer ce tour. Il fera aussi un tirage au sort parmi les autres qualifiées pour déterminer les adversaires pour chaque rencontre. 113 joueuses se sont inscrites à ce tournoi. Anne-Marie a perdu 1 match. Il n'y a jamais de match nul !

Combien de matches ont-ils été joués au cours de ce tournoi ?

Réponse : Il ne faut pas se laisser embarquer par la complexité e la règle (et notamment pas par cette histoire de tirage au sort) : ce qu'on sait en définitive, c'est que 112 personnes ont perdu deux fois et que la 113e n'a perdu qu'une fois, ce qui fait un total de 225 défaites, donc 225 matches.

10ème défi – Canoë

Vous vous entraînez à une épreuve de canoë-kayak en pagayant à vitesse constante. Après 6 kilomètres, votre casquette tombe à l'eau et s'éloigne en flottant à la vitesse du courant.
Vous poursuivez votre chemin pendant 2 heures avant de réaliser que votre casquette est tombée et de faire demi-tour pour le rattraper en pagayant toujours au même rythme.
Vous rattrapez votre couvre-chef juste au moment où vous rejoignez votre point de départ de l'épreuve.

Quelle est la vitesse du courant ?

Réponse:
Posons x la vitesse du courant et y la vitesse du canoë (quand le courant est à 0)
Le canoë avance pendant 2 heures : sa vitesse est y - x donc la distance est 2y - 2x
Le retour est la même distance mais à une vitesse de y + x donc la durée est (2y -2x) / (y + x)
Les derniers 6km se font à la vitesse y + x donc la durée est de 6 / (y + x)
La durée totale (en enlevant les 6 premiers km où il avait son chapeau) est donc de :

2 + (2y - 2x) / (y +x) + 6 / (y + x) ce qui donne en simplifiant (4y + 6) / (y + x) comme durée totale.

Ce même temps est effectué par le chapeau à une vitesse x pendant 6km soit 6 / x
Donc : (4y + 6) / (y + x) = 6/x
On trouve donc 6y + 6x = 4xy + 6x soit 6y = 4xy soit 6 = 4x
x = 1,5
La vitesse du courant est donc de 1,5 km/h.

11ème défi : le village Olympique

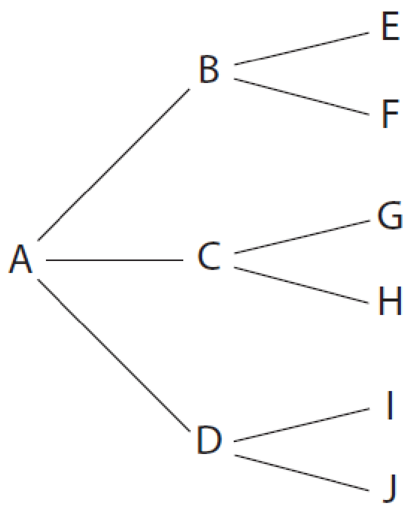
Un village olympique installe des liaisons par navettes pour relier les lieux d'hébergement, d'entraînement et de compétition. Le comité de gestion du village doit choisir *n* points (correspondant à l'un des lieux) de telle sorte que :
• chacun des *n* points est en liaison directe par une navette avec au plus trois autres points ;
• pour se rendre d'un des points choisis à un autre on emprunte au plus deux navettes successives.

1) Ces contraintes impliquent un nombre maximal de lieux que le village doit contenir. Quel est ce nombre ?
2) Construire un réseau avec 10 points satisfaisant aux conditions imposées.

Le nombre maximal de lieux que le village doit contenir est égal à **10 !**

Ce problème est compliqué à formaliser, mais relativement simple si on pense à le mener sa recherche sous la forme d'un arbre :

1) On désigne par A, B, C, D,. . . les points du parc d'attractions.
Soit A l'un de ces points. En utilisant la première condition, il est directement relié à au plus trois points qui sont eux-mêmes reliés à au plus deux points. Le schéma ci-dessous donne le nombre maximal de points atteint à partir de A.
On constate qu'à partir de A, on peut atteindre au plus neuf points en deux liaisons. Il y a donc au plus dix points.



2) Diagramme :