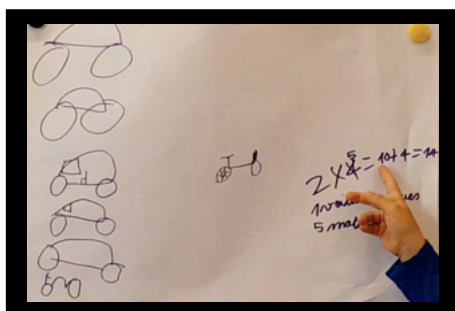


Cahier de Lesson Study

Année 2020-2021

« Garage »



Co-écrit par :

Les Référents Mathématiques de Circonscription Normands du Parcours LS du plan mathématique en 2020-2021,

Céline Angebault, Delphine Apchie, Valérie Bindé, Stéphane Boscher, Marc Chenal, Gaëlle Cornu, Sandrine Delaunay, Laurent Déporte, Corinne Hervé, Frédéric Le Menez, Sophie Loisel, Stéphanie Michelle, Christelle Montoro, Bruno Outin.

L'équipe de formation-recherche :

Frédéric Hartmann, RMA de Normandie, groupe « Activités-LS » IREM de Rouen
Blandine Masselin, RMA de Normandie, membre affiliée au LDAR de l'Université de Paris, groupe « Activités-LS » IREM de Rouen
Michèle Artigue, professeure émérite au LDAR de l'Université de Paris.
Le groupe « Activités » de l'IREM de Rouen en appui

Avec le soutien de :

Nicolas Gendreau & Claude Chotteau, COPIL du plan mathématiques Académie Normandie.



Table des matières

1. INTRODUCTION.....	2
LA SITUATION « GARAGE »	2
BO ET COMPETENCES AU CYCLE 2 VISEES	2
2. ANALYSE A PRIORI	3
CONNAISSANCES MISES EN JEU.....	4
DIMENSION VIE QUOTIDIENNE	4
PLACE DANS LA PROGRESSION.....	4
MATERIEL	5
DEMARCHES POSSIBLES DES ELEVES.....	5
DIFFICULTES ET ERREURS POSSIBLES	5
3. DEROULEMENT DES LESSON STUDIES.....	6
PREMIERE LESSON STUDY (BOURG-ACHARD).....	6
DEROULEMENT ENVISAGE.....	6
ANALYSE A POSTERIORI DU DEROULEMENT EFFECTIF (BOURG-ACHARD).....	9
GRILLE D'INTERVENTIONS POSSIBLES DE L'ENSEIGNANT (BOURG-ACHARD)	20
DEUXIEME LESSON STUDY (VERSON)	22
DEROULEMENT ENVISAGE.....	23
ANALYSE A POSTERIORI DU DEROULEMENT EFFECTIF (VERSON)	24
GRILLE D'INTERVENTIONS POSSIBLES DE L'ENSEIGNANT (VERSON)	36
4. LE MOT DE L'EQUIPE DE FORMATION-RECHERCHE	38
UNE QUESTION COMMUNE SOULEVEE PAR LES PHASES DE BILAN	38
LA QUESTION DE LA MODELISATION AUTOUR DE LA SITUATION « GARAGE »	38
LA QUESTION DE LA REPRESENTATION	40
5. CONCLUSION.....	41
REMERCIEMENTS	41
BIBLIOGRAPHIE	42
ANNEXE.....	43

1. Introduction

La situation « Garage »

La situation « Garage » est un problème de recherche numérique à deux contraintes pour lequel les élèves ne disposent pas de modèle pour sa résolution¹. Cette situation a été proposée par les référents mathématiques académiques (RMA) dans le cadre du plan mathématiques 2020-2021. Ces formateurs sont des référents mathématiques de circonscription RMC et certains sont PEMF. La situation « Garage » a été proposée à l'ensemble des RMC normands du parcours Lesson Study du plan mathématique en 2020-2021. Il s'agit de deux collectifs qui seront nommés : RMC de Bourg-Achard et RMC de Verson en lien avec le lieu de la première journée de formation. Voici l'énoncé qui leurs a été proposé initialement :

Sur un parking, il y a des voitures et des motos.

On a compté 6 véhicules. On a compté les roues, il y en a 14.

- Combien y-a-t-il de voitures ?

- Combien y-a-t-il de motos ?

Énoncé « Garage » proposé en formation de RMC, Parcours LS, académie Normandie, 24/09/2020

La situation « Garage » fait référence à celle des « poules et lapins » d'ERMEL. Elle est conforme aux attendus des programmes 2015. C'est une situation de recherche concrète axée sur le tâtonnement et la manipulation des élèves.

BO et Compétences au cycle 2 visées

Compétences travaillées
Chercher <ul style="list-style-type: none">• S'engager dans une démarche de résolution de problèmes en observant, en posant des questions, en manipulant, en expérimentant, en émettant des hypothèses, si besoin avec l'accompagnement du professeur après un temps de recherche autonome.• Tester, essayer plusieurs pistes proposées par soi-même, les autres élèves ou le professeur.
Modéliser <ul style="list-style-type: none">• Réaliser que certains problèmes relèvent de situations additives, d'autres de situations multiplicatives, de partages ou de groupements.
Représenter <ul style="list-style-type: none">• Appréhender différents systèmes de représentations (dessins, schémas, arbres de calcul, etc.).• Utiliser des nombres pour représenter des quantités ou des grandeurs.
Raisonner <ul style="list-style-type: none">• Anticiper le résultat d'une manipulation, d'un calcul.

¹ Le lecteur pourra s'il le souhaite résoudre ce problème en s'appuyant sur un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

- Tenir compte d'éléments divers (arguments d'autrui, résultats d'une expérience, sources internes ou externes à la classe, etc.) pour modifier son jugement.
- Prendre progressivement conscience de la nécessité et de l'intérêt de justifier ce que l'on affirme.

Calculer

- Calculer avec des nombres entiers, mentalement ou à la main, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies adaptées aux nombres en jeu.
- Contrôler la vraisemblance de ses résultats.

Communiquer

- Utiliser l'oral et l'écrit, le langage naturel puis quelques représentations et quelques symboles pour expliciter des démarches, argumenter des raisonnements.

En complément, voici des compétences mathématiques visées² dans la réalisation de tâches autour de cette situation au cycle 2.

- Traiter deux informations simultanément (nombre de roues et nombre de véhicules).
- Émettre et tester une hypothèse par la manipulation et la représentation.
- Vérifier que la solution produite tient compte des deux contraintes.

2. Analyse a priori

En partant de la grille d'amorce d'analyse *a priori*, des éléments d'analyse *a priori* ont été dégagés par les deux collectifs. Les tables ci-dessous en sont une synthèse et l'on retrouve les six axes proposés dans la grille.

² La situation pourrait être également proposée pour le cycle 3, mettant en jeu les mêmes compétences qu'au cycle 2.

Connaissances mises en jeu

Bourg-Achard	Verson
<ul style="list-style-type: none"> - additions itérées -la commutativité ($a + b = b + a$) compter d'abord les motos puis les voitures - résolution de problème - $4 \times \dots, 2 \times \dots$, notion de double/moitié - multiplication - division et nombre de parts. Dans 14, combien 14 de fois 2 ? 4 ? plus reste ... ? (CM2) - Décompositions de 14 et de 6 <p>$14 = \dots \times 2 + \dots \times 4$; $14 = 10 + 4$</p>	<ul style="list-style-type: none"> - addition et additions itérées - des multiplications. - vérifier le résultat pour valider ou invalider. - dénombrer par comptage. - énumérer, organiser sa procédure pour repérer chaque unité

Dimension vie quotidienne

Bourg-Achard	Verson
<ul style="list-style-type: none"> - Objet connu 2 roues (motos) et 4 roues (voitures) - Véhicule ? - Dimension de jeu avec des petites voitures - Familiarisation avec la situation 	<ul style="list-style-type: none"> - Situation proche de la vie des enfants (jouets) - Connaissance implicite : voiture / 4 roues; moto / 2 roues - Modélisation : roue de voiture = roue de moto

Place dans la progression

Bourg-Achard (RMC 76-27)	Verson (RMC 14-50-61)
<ul style="list-style-type: none"> - Maternelle : GS : avec objets trop limite (jusque 10). - Cycle 2 CP-CE1 : résolution de problèmes avec manipulation, et représentation ? - Cycle 2 CE2 : double, moitié, répertoire multiplicatif manipulation ? Représentation (sans objet ?) - Cycle 3 	<ul style="list-style-type: none"> Au cycle 2 - Au CP : en début d'année pour chercher avec une démarche essais/erreurs. - Au CE1: milieu d'année. - Au CE2 : dès le début d'année pour réactiver les notions.

<p>CM1 : première période résolution de problèmes</p> <p>CM2 : changement de variables</p>	
--	--

Matériel

Bourg-Achard	Verson
<ul style="list-style-type: none"> - Jetons - Châssis permettant de représenter des motos et des voitures - Cubes 	<ul style="list-style-type: none"> - Papier, crayon - Jetons pour représenter des véhicules ou des roues (choix de couleur ou pas selon le véhicule) - Images de voitures, de motos - Petites voitures et motos

Démarches possibles des élèves

Bourg-Achard (RMC 76-27)	Verson (RMC 14-50-61)
<ul style="list-style-type: none"> - Possibilité de schématiser - Représentation de roues/de véhicules - Tâtonnement avec essais erreurs de quel type ? - Entrée par nombre de véhicules/de roues en fixant 6 ou 14 	<ul style="list-style-type: none"> - Calculs par tâtonnement - Démarche en partant des véhicules en répartissant ensuite les roues ou inversement

Difficultés et erreurs possibles

Bourg-Achard	Verson
<ul style="list-style-type: none"> - Sur la représentation d'une voiture de profil, considérer deux roues - Oublier une contrainte - Véhicules à 3 roues - Erreurs de calculs - Difficulté à modéliser, à comprendre la situation. - Ancrage de la situation : non secondarisation de la part de l'élève 	<ul style="list-style-type: none"> - Vocabulaire : véhicules. - Deux données à vérifier simultanément - Ne vérifier qu'un seul paramètre ou absence de vérification - Défauts de représentations - Erreurs de calculs ou de comptage - Les élèves ne peuvent pas se référer à un modèle type (problème atypique) - Difficultés à justifier sa réponse.

- Calculer $6 + 14 = 20$ ou $6 + 14 = 74$	
---	--

Grille d'amorce d'analyse a priori, Parcours LS « Garage », 24/09/2020

3. Déroulement des Lesson Studies

Première lesson study (Bourg-Achard)

Déroulement envisagé

Voici l'énoncé fixé par le collectif d'enseignants et destiné initialement à une classe d'élèves de CE1 de l'école Michelet de Sotteville-lès-Rouen. Il est identique à celui proposé initialement dans le parcours LS.

Sur un parking, il y a des voitures et des motos. On a compté 6 véhicules. On a compté les roues, il y en a 14.
--

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none">- Combien y-a-t-il de voitures ?- Combien y-a-t-il de motos ? |
|--|

Énoncé retenu par le collectif des RMC Bourg-Achard, LS « Garage », 22-02-2021

Voici les objectifs de la séance :

En Cycle 2 au niveau CE1 :

- Résolution d'un problème numérique,
- Notion de double,
- Savoir argumenter, modélisation,
- Tenir compte d'une double contrainte.

Matériel

- Des jetons,
- Des cubes de couleur qui s'empilent (permettant d'échanger une voiture contre deux motos ou vice-versa),
- Des clipos (on peut faire seulement un tour),
- Des châssis à matérialiser (rectangle) comme support de représentation des véhicules auxquels les élèves pourraient ajouter des roues.

Mode opératoire

Travail individuel, puis mise en groupes à hétérogénéités réduites.

Autoriser l'usage de ressources (manuel, table où il y a du matériel, ...)

Scénario prévu

Prévoir feuilles de deux couleurs pour distinguer productions individuelles et celle du groupe
Le matériel est déposé sur une table prévue à cet effet avant le début de la séance

Phase 1 (5 min) : Description

Introduction : donner le but de la séance.

P³ : « Le but de la séance est de rechercher un problème, vous allez travailler tout seul dans un premier temps puis vous serez mis en groupe pour donner une réponse commune ».

Donner l'énoncé papier, lecture de l'énoncé par l'enseignant.

Expliquer le mot « véhicule » (intervention systématique de P).

P : « Expliquer que c'est un moyen de transport, demander des exemples aux élèves. »

À la demande, P indique le nombre de roues par véhicules. Un élève reformule le problème pour éviter la confusion

Ces consignes permettent à l'enseignant de s'assurer que les élèves ont compris ce que l'on cherche.

P : « Vous commencez par travailler tout seul, si vous avez besoin de matériel vous allez vous servir ou vous nous demandez. »

En toute fin de la phase 1 :

P : « Vous allez travailler en groupe et on attendra de votre groupe une réponse au problème. »

Phase 2 (5min) : Phase de travail individuelle

Le matériel décrit plus haut est à disposition (jetons, cubes, clips, châssis).

La phase 2 ne vise pas un aboutissement dans la résolution. La présence de matériel dans cette phase a plusieurs visées. Pour les élèves en difficulté, un objectif est de les faire entrer dans la manipulation dans cette phase. En cours de manipulation, l'enseignant encouragera au passage à une représentation après manipulation.

Support : une feuille de couleur A4 distribuée à chaque élève. Elle vise à ce que les élèves aient suffisamment cherché et aient mis une première trace de leur recherche afin ensuite de la partager au groupe.

En toute fin de phase 2, l'enseignant dit :

P : « Maintenant, vous allez mettre en commun ce que vous avez trouvé. »

Phase 3 (20 min) : Travail de groupe (par quatre)

P : « Vous allez vous mettre d'accord et me proposer une réponse commune au problème en expliquant sur la feuille. La réponse du groupe doit être partagée par tous, tout le groupe doit tomber d'accord. »

³ P est l'enseignante-expérimentatrice

Laisser le matériel vivre dans le groupe s'il existe.

Pause des élèves (15 min) Scan des productions des groupes

Phase 4 (durée non précisée) : bilan et institutionnalisation

Cette phase s'articule avec différentes productions de groupes organisées par l'enseignante-expérimentatrice afin de dresser un bilan dont la trace écrite visées est la suivante :

Il y a plusieurs procédures qui permettent d'arriver à la solution au problème.

Cette phase est prévue à l'aide d'un visualiseur pour partager ces productions à la classe entière.

Étape 1 : Recueil des solutions

P liste tout et invalide les propositions erronées.

3 voitures et 2 motos

3 voitures et 3 motos

1 voiture et 5 motos

Étape 2 : On projette sans redondance des productions au visualiseur, projection en mode express, on s'arrête sur celles qui nous intéressent.

Le temps de bilan et institutionnalisation a été fixée ainsi :

P fait intervenir des groupes ayant employés des procédures différentes : il projette au tableau des productions de groupes, soutien visuel de mémoire des procédures.

P demande au groupe qui a une(des) procédure(s) juste(s) :

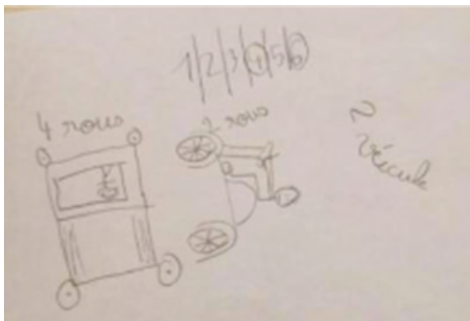
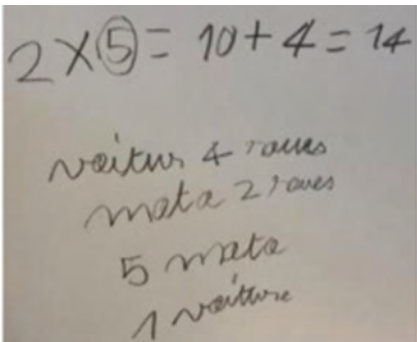
P : « Comment l'écrire avec des nombres ? »

Entrée par véhicules	$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$ $10 + 4 = 14$
Entrée par les roues	$10 + 4 = 14$ $10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$
L'écriture avec des nombres permet de partager nos procédures.	

Correction prévue au tableau pour les élèves.

Analyse a posteriori du déroulement effectif (Bourg-Achard)

La classe d'élèves finalement retenue pour l'expérimentation était un niveau mixte de CE1-CE2 (avec majoritairement des CE1). Par rapport aux objectifs, le collectif a remarqué lors de la séance des différences dans le choix des procédures des élèves selon le niveau. Par exemple en CE1, les élèves avaient davantage recours à la manipulation, puis à la schématisation. Pour les élèves de CE2, les procédures de calcul ont été davantage utilisées.

Brouillon d'un élève de CE1	Brouillon d'un élève de CE2
	

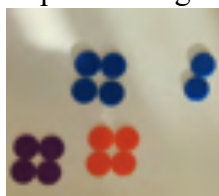
Travaux des différents groupes d'élèves

Voici un panorama des productions de l'ensemble des travaux des élèves. L'analyse du déroulement effectif est basée, entre autres, sur les productions des élèves.

Groupe 1 (CE1)

M choisit des jetons. Elle en prend 6 au départ (entrée par véhicules) tandis que J en prend 14 (entrée par les roues).

M change de stratégie mais ne va pas au bout (elle pousse ses jetons organisés par 4 et par 2 pour faire place à la feuille A3 distribuée par l'enseignante).



Les deux autres élèves utilisent leurs doigts et indiquent 3V et 1M⁴ pour l'un et 3V et 7M pour l'autre. Il a considéré deux problèmes distincts avec uniquement des motos ou uniquement des voitures. J fait des paquets de 4 jetons et de 2 jetons et trouve 1V et 5M. L'enseignante lui indique qu'il peut les représenter sur sa feuille, ce qu'il amorce sur son brouillon. J invalide (3V, 1M) et (3V, 7M) en représentant ces propositions élèves et en pointant la contrainte non respectée :

- pour (3V, 1M) le nombre total de véhicules est 4 et non pas 6
- pour (3V, 7M) le nombre total de roues est 26 roues et non pas 14.

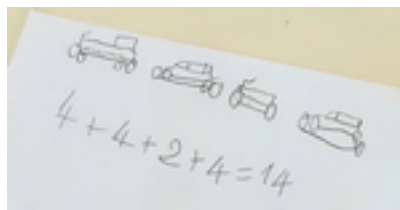
⁴ V voiture et M moto

Groupe 2 (CE2)

K lit silencieusement l'énoncé puis effectue le calcul en ligne directement sur sa feuille individuelle et écrit : « $4 + 4 = 8 + 4 = 12 + 1 \text{ moto} = 14$ ». Puis il ajoute en haut de sa feuille : « 3 voitures 1 moto »

L'élève E lit silencieusement, réfléchit mais ne produit pas sur sa feuille. L'enseignante passe dans le groupe et lui demande si elle a besoin de matériel. E acquiesce. L'enseignante lui donne des jetons. E s'engage instantanément dans la recherche par tâtonnements. Elle fait des groupements par nombre de roues (groupements de 2 ou 4 jetons).

L lit silencieusement puis commence par dessiner des véhicules. Il transcrit son dessin par un calcul en ligne en recomptant les roues ($4 + 4 + 2 + 4 = 14$), puis écrit « *J'ai dessiné 3 voitures et une moto et ça m'a fait 14.* »



L'élève S s'engage dans un calcul en ligne : $4 + 6 = 15$. L'élève reproduit le même calcul en ligne 14 fois (superposition des calculs) :

$$4 + 6 = 15$$

$$4 + 6 = 15$$

...

S note à côté de ses calculs « + 15 », puis écrit la phrase réponse : « *Il y a 15 voitures* ».

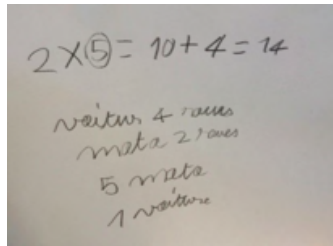
Groupe 4 (CE2)

L'élève N a demandé des jetons et les utilise pour faire 14 paquets de 4 jetons (14 voitures). Puis finalement il en fait 6 (pas assez de jetons). L'élève I lui dit « Ce n'est pas ça, il n'y a que 6 véhicules ». Pas de réaction de N. L'élève A utilise ses allumettes (matériel de l'école) :



Il a noté 6×14 sur sa feuille et fait 6 paquets de 14 allumettes.

L'élève I a trouvé la solution durant la phase 1 en comptant sur ses doigts : 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 pour les doigts de la main droite et 14 pour le pouce de la main gauche. I écrit 5 motos et 1 voiture. P lui demande d'expliquer pourquoi ça marche. Il montre avec ses doigts et P lui demande d'écrire. Il produit :



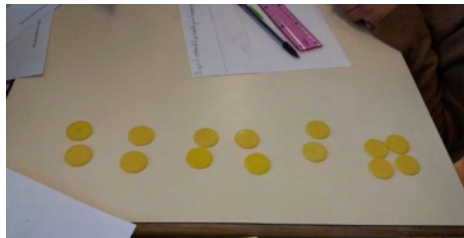
S a trouvé en comptant le nombre de roues 2V et 3M.

I invalide sa solution : « $2 + 3 = 5$ véhicules et pas 6 ».

S persiste « Il y a 14 roues ».

I : « Mais il faut aussi 6 véhicules et pas 5 ».

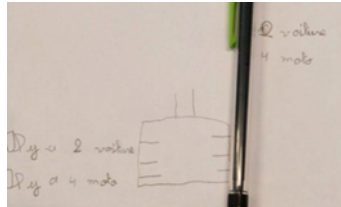
Le groupe finit par se rallier à la solution de I après partage avec les jetons.



Groupe 5 (CE1)

Dans la phase 1, l'élève Sa compte sur ses doigts ; il compte à nouveau. Un autre élève du groupe, Lo, dit tout au haut : « Il y a 6 véhicules et 14 roues. »

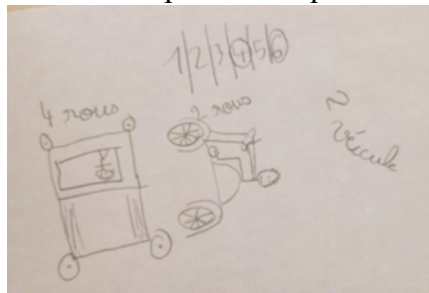
Lors de la phase de travail en groupe, Lo a représenté 6 emplacements.



L'élève Lé utilise des cubes.

Sa a représenté un parking et écrit : « Il y a 2 voitures et 4 motos ».

Lé prend plus de 20 cubes mais ne semble pas savoir quoi en faire.



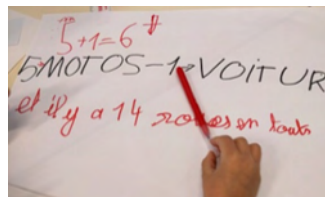
Lo dessine une voiture et une moto, représente un parking avec 6 places ; et écrit « 4 roues » au-dessus de « voiture » ; « 2 roues » au-dessus de « moto ». Il écrit « 2 véhicules »

Lé fait 6 paquets de 4 cubes.



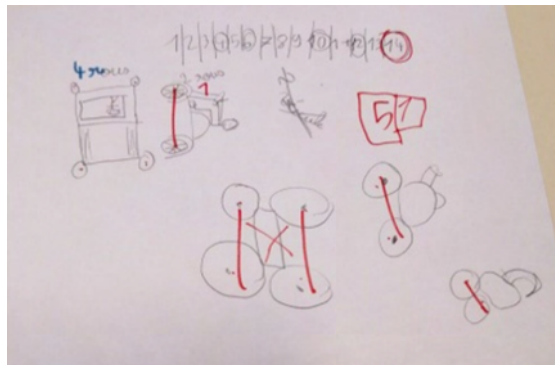
Lors de la phase 3, Sa et L proposent d'emblée leur solution : 5 motos et une voiture ; Lé reste à l'écart spatialement ; Lo et I adhèrent à la solution.

Sa et L justifient leur proposition et l'écrivent : « $5 + 1 = 6$ » puis alors qu'ils ont dit le calcul, écrivent : « *Il y a 14 roues.* »



Discussion sur l'écriture des mots en capitale et sur la chance de pouvoir écrire avec des feutres qui ne sont pas réservés à cet usage normalement.

Lo et I se remettent à travailler ensemble ; le dessin a été complété (quand ?). Il présente 2 voitures (formes différentes) et 3 motos. Lo barre l'une des deux voitures ; relie les roues deux à deux en rouge et le fait pour les 3 autres motos. Elle écrit « 5/1 ». 14 est entouré sur un fil numérique qui va de 1 à 14.



Groupe 6 (CE1)

A dessine 4 véhicules sans roue. Elle pose 4 jetons sur chacun des 3 premiers véhicules.

N dessine 2 véhicules avec des détails (sans ou avec roues / personnages). Il revient sur la lecture de l'énoncé : dessine 14 roues au milieu de sa feuille et écrit « $6 + 14 = 20$ »

L dessine 3M et 3V et écrit « $6 + 14 = 20$ ». Relance de P qui lui apporte une boîte de jetons.

P : « *Ah oui ceux sont les roues.* »

L'élève L place l'ensemble des jetons sur sa feuille (2 lignes de 12 jetons) et écrit : « *Il y a 24 roues en tout* ».

M mélange l'écriture mathématiques et la représentation des roues :

M écrit « *Il y a 1 voiture et 5 motos* ».

Pour le temps collectif, l'ensemble propose de dessiner les 14 roues.

M : « *On entoure 4 roues puis 4 roues puis 4 roues* »

L : « *et 2 roues* »

A : « *Mais ça fait 4 véhicules, il en faut 6* » 2^{ème} contrainte verbalisée

M « On n'a qu'à séparer une voiture en deux »
A entoure deux roues puis deux roues. N recompte les véhicules pour validation.
Chaque enfant écrit un mot « *Il y a 5 motos et 1 voiture* ».

Alternatives d'énoncé et de scénario

Par rapport au scénario initial, le collectif a effectué des modifications. Il a choisi de fusionner les deux questions initiales en une unique, après avoir repéré la dissociation en deux problèmes distincts réalisée par deux élèves de la classe.

Voici le nouvel énoncé proposé :

Sur un parking il y a des voitures et des motos. On a compté 6 véhicules On a compté les roues : il y en a 14 Combien y a-t-il de voitures et de motos ?

Phase 1

L'utilisation des feuilles de différente taille a permis de conserver une trace du cheminement et du raisonnement des élèves (contrairement à l'ardoise, par exemple).

Lors de cette phase, l'enseignante-expérimentatrice a modifié la consigne en proposant aux élèves de leur apporter le matériel si besoin, à cause du contexte sanitaire de la leçon de recherche (protocole à respecter).

A posteriori, durant la phase 1, le collectif souhaite consacrer du temps à la présentation du matériel à disposition.

Phases 2 et 3

A posteriori, les jetons et cubes ont permis de « casser » plus facilement une voiture en deux motos.



Toutefois, une élève a rencontré des difficultés (groupe 5) lors de la manipulation des cubes avec 4 picots. Elle a identifié le cube comme une voiture dotée de 4 roues représentées pour les picots. Le collectif avait également prévu des images de châssis à matérialiser (rectangle) et des images de roues pour compter le nombre de véhicules et le nombre de roues. Ce matériel, disponible, n'a pas été proposé aux élèves lors de la leçon de recherche par l'enseignant-expérimentateur.



L'utilisation de jetons magnétiques pour la phase de mise en commun a permis de faciliter la verbalisation de procédures et de leur explicitation au groupe classe (même nombre de jetons magnétiques que de jetons manipulables par les élèves et de la même couleur : 12 jaunes, 24 verts, 12 rouges, 24 bleus).

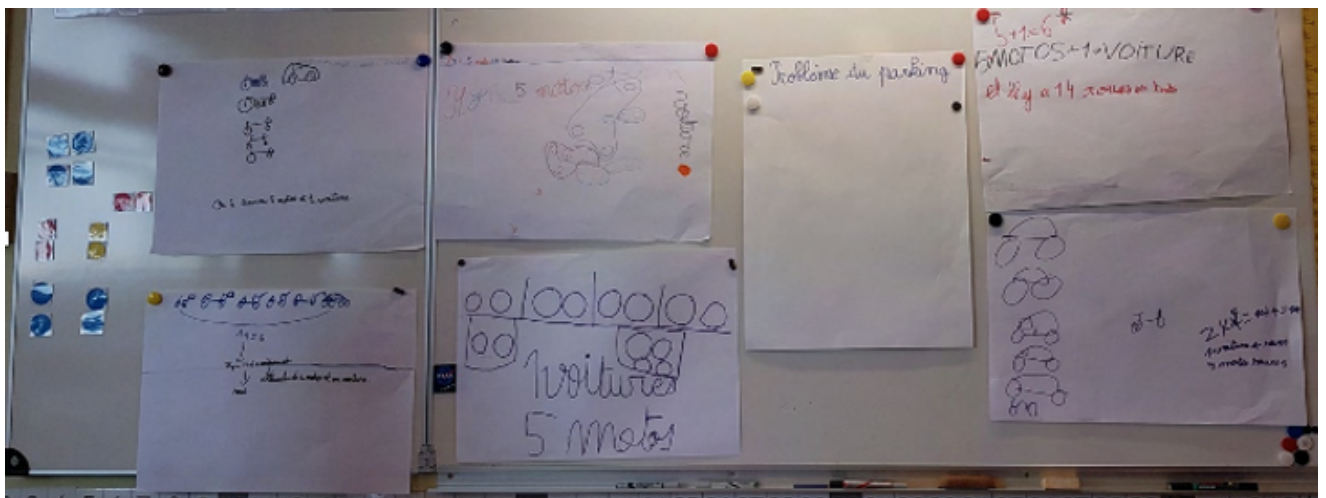


Durant ces phases du scénario, le collectif de RMC a imaginé de nouvelles interventions possibles de l'enseignant. Elles sont indiquées en bleu dans la grille présentée en p.20-21. Les conditions sanitaires nous ont contraint à réaliser deux expérimentations. Aussi, d'autres interventions possibles de l'enseignant ont été imaginées et sont présentes en vert : elles proviennent d'une seconde expérimentation à partir de la même feuille de route initialement décrite.

Phase 4 : (durée non précisée) Description de la phase de bilan et d'institutionnalisation

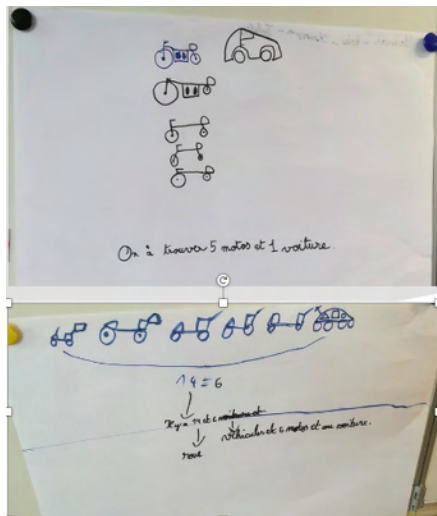
L'enseignant-expérimentateur a structuré la phase de bilan à partir de productions des groupes d'élèves réalisées sur des feuilles de format A3, en l'absence de vidéoprojecteur.

Durant la pause des élèves, les productions ont été placées au tableau ainsi que 14 jetons magnétiques à gauche du tableau comme suit.

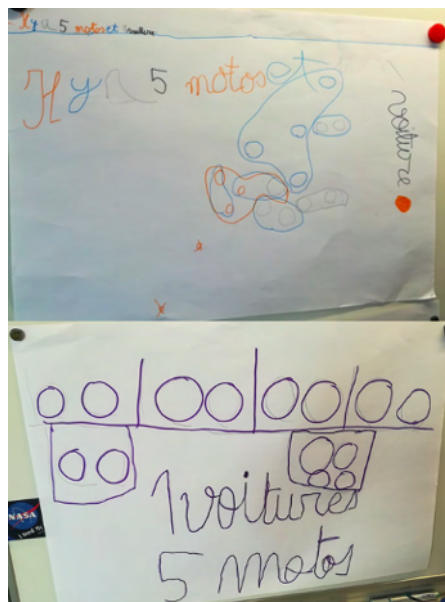


Tableau, Classe de CE1-CE2, LS Sotteville les Rouen, 22-02-2021

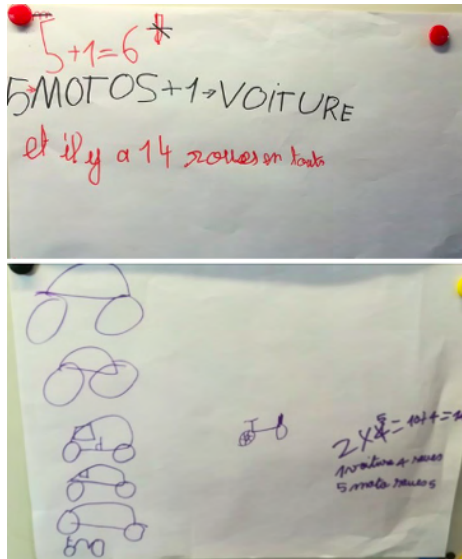
Sur le tableau de gauche, les deux productions présentent des représentations iconiques des voitures et motos.



À gauche du tableau central, deux productions l'une au-dessus de l'autre ont en commun des représentations de constellations (peu organisée pour celle du dessus et plus organisée pour celle en dessous).

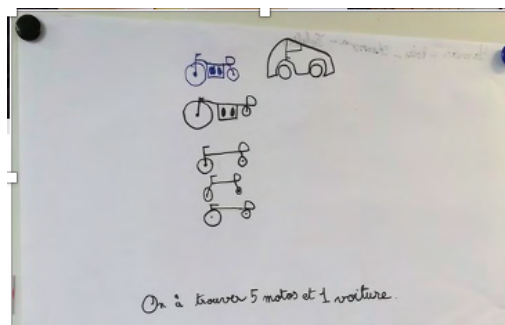


A droite d'une affiche à l'initiative de l'enseignante-expérimentatrice, les deux productions de groupes présentent des égalités mathématiques



Analyse *a posteriori* de la phase de bilan et d'institutionnalisation

L'introduction improvisée de 14 jetons magnétiques placés au tableau avant le bilan a permis de soutenir le discours d'une élève rapportant le travail de son groupe.



Un second rapporteur de groupe (groupe 6) les a manipulés devant la classe sans plus-value pour le bilan. Il a été jugé intéressant de bloquer l'accès aux jetons magnétiques pour les groupes suivants étant donné son coût en temps. De plus le nombre de jetons magnétiques à disposition était de 14 ce qui oriente vers une entrée par les roues et le collectif a souhaité comme alternative plutôt mettre plus de jetons au tableau.

L'enseignante-expérimentatrice est revenue sur des égalités erronées (de type $14 = 6$) présentes dans deux groupes pour les invalider lors du bilan.

Restructuration *a posteriori* de l'organisation du bilan et tableau

Voici une présentation étape par étape de l'organisation du tableau repensée a posteriori par le collectif de RMC et qui tient compte des alternatives pensées.

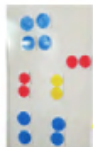
Etape 1 : Procédure avec entrée par les roues

Collection de 20 magnets non organisée			

Etape 2



Un élève extrait 14 magnets et refait la manipulation 	On a utilisé deux stratégies différentes		
	En partant de 14 roues		

Etape 3


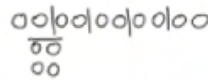
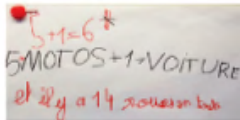
	On a utilisé deux stratégies différentes		
	En partant de 14 roues Représentation des 14 roues du type :		

$$\begin{array}{cccccccc} \circ & \circ & | & \circ & \circ & | & \circ & \circ & | & \circ & \circ \\ \hline \circ & \circ & & & & & & & & & \\ \circ & \circ & & & & & & & & & \end{array}$$

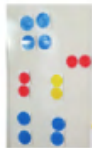

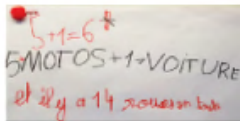
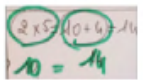
Etape 4 : Passage à l'écriture symbolique

	On a utilisé deux stratégies différentes	
	<p>En partant de 14 roues</p>  <p> $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$ ou $2 \times 5 = 10$ et $10 + 4 = 14$ ou $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 4 = 14$ </p>	


Etape 5 : Procédure avec entrée par les véhicules


	On a utilisé deux stratégies différentes	
	<p>En partant de 14 roues</p>  <p> $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$ ou $2 \times 5 = 10$ et $10 + 4 = 14$ ou $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 4 = 14$ </p>	<p>En partant des 6 véhicules, choix d'une décomposition additive de 6</p> 

Etape 6 : Retour sur les égalités présentes dans les écrits des groupes

	On a utilisé deux stratégies différentes		Débat sur les égalités
	<p>En partant de 14 roues</p>  <p> $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$ ou $2 \times 5 = 10$ et $10 + 4 = 14$ ou $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 4 = 14$ </p>	<p>En partant des 6 véhicules, choix d'une décomposition additive de 6</p> 	<p>$14 = 6$ P : " 14 est-il égal à 6 ? "</p> <p>$2 \times 5 = 10 + 4 = 14$</p>  <p>P déconstruit l'égalité</p>

Grille d'Interventions possibles de l'enseignant (Bourg-Achard)

Phases	Déclencheur d'intervention	Interventions	Effets attendus, buts
1	Nombre de roues d'une voiture et/ou d'une moto	A la demande, l'enseignant donne le nombre de roues par véhicule	Décoincer si nécessaire
1	Incompréhension du mot « véhicule »	Demander aux élèves plusieurs noms de véhicules (faire une liste de véhicules...)	
2	Un élève ne fait pas de tentatives visibles, ni écrites, ni gestuelles	Qu'est ce qu'on sait ? Qu'est qu'on cherche ?	Le mettre au travail
2	Un élève est en difficulté en phase individuelle	1) On met à disposition du matériel parmi jetons, cubes connectables (tours). 2) P à l'élève qui manipule « Tu ne peux pas me dessiner cela sur une feuille... »	1) Idée de faire entrer dans un début de procédure par manipulation. 2) Idée de faire passer de la manipulation à une représentation
2	Un élève propose $6 + 14$	Faire utiliser le matériel. Faire représenter, raconter en tant que P ou faire raconter l'histoire P « Qu'est-ce que c'est que 6 »?	Faire changer de stratégie l'élève
2	L'élève bloque malgré le matériel	L'élève reçoit des cubes avec 4 picots 	Relancer la recherche.
2	Un élève demande si on compte des motos à 2 ou 3 roues.	On considère des motos à 2 roues.	Modélisation unique
3	L'élève passe son temps à jouer avec le matériel.	P lui demande de ne plus toucher au matériel, de dessiner.	Passage à la représentation.
3	Si des groupes ne gèrent que le nombre de roues ou de véhicules.	Rappeler l'autre contrainte, pointer l'autre contrainte en la faisant relire, réintroduire le matériel	Prendre en compte les 2 contraintes de l'énoncé.

3	Un groupe a fini très tôt	P « On considère des motos à 3 roues maintenant en gardant 14 et 6 » ou proposer un autre garage avec seulement le nombre de roues connu.	Remettre le groupe en situation de recherche.
3	Un élève a écrit 6 x 14.	P « Qu'est-ce que tu as voulu dire en écrivant ce calcul ? Raconte-moi le problème ».	Repérer l'incompréhension.
3	Un élève manipule 6 x 14 buchettes.	P « Que représente une buchette ? » Changement de matériel : proposer un parking avec 6 voitures pour positionner les roues.	6 roues conduisent à 24 roues et donc 84 pas possible.
3	Un élève propose 7 motos et 3 voitures.	P demande combien il y a de véhicules en tout.	Faire revenir la deuxième contrainte du nombre de véhicules fixé.
3	Le groupe ne produit que la phrase réponse.	P « Vous devez écrire comment vous avez fait. »	Faire apparaître leur raisonnement.
3	Les élèves n'imaginent pas échanger la voiture en deux motos. Principe de réalité : pas de détachement de l'objet voiture à 4 roues	P propose du matériel mathématique : jetons et châssis	Les élèves prennent conscience de double avec la voiture et de moitié avec la moto 1 voiture est équivalente en nombre de roues à 2 motos.
3	Les élèves n'arrivent pas à comprendre la double contrainte : 6 véhicules	L'enseignant va donner un parking permettant à l'élève de structurer sa recherche. 	Les élèves sont relancés et tiennent compte des six véhicules.

Deuxième lesson study (Verson)

Énoncé

Voici l'énoncé fixé par le collectif, il a été modifié de façon à amener de la richesse dans les interactions dans les groupes et dans le bilan. Le collectif a conscience du biais de l'existence d'une solution optimale à 20 roues.

Sur un parking il y a des voitures et des motos.

Choisis 8 véhicules parmi ces voitures et ces motos.

Le nombre total de roues doit être le plus proche possible de 20.

Énoncé retenu par le collectif des RMC Verson, LS « Garage », 24/09/2020

Objectifs de la séance en CE1

Développer des procédures de résolution diverses mais appropriées à la situation.

Résoudre des problèmes à étapes mixant addition et multiplication lorsque les nombres en jeu ne nécessitent pas la mise en œuvre d'un algorithme opératoire.

~~Construire en situation le sens de la multiplication.~~ *Cet objectif ne semble finalement pas adapté à la situation complexe proposée. Une situation plus simple pourrait permettre de viser un tel objectif.*

Compétences travaillées : Chercher, raisonner, communiquer.

Matériel

Des images représentant des voitures et des motos ont été fabriquées et plastifiées. Leur objectif est de permettre aux élèves qui le souhaitent de s'appuyer sur celles-ci pour trouver une configuration de véhicules respectant les contraintes.

Des jetons noirs ont aussi été prévus avec les mêmes modalités et les mêmes objectifs.



Matériel à disposition, LS Garage, Verson, 2020

Mode opératoire

Travail en groupe de 4 élèves.

Une feuille A4 avec l'énoncé par élève pour le travail individuel.

Prévoir 30 jetons (une seule couleur) par groupe, des images de voitures (4 roues visibles) et de motos.

Matériel non visible dès le départ, un visualiseur pour le bilan.

Déroulement envisagé

Phase 0 : Notion de véhicules

Prévoir en amont qu'un travail sur le mot véhicule soit fait par l'enseignante de la classe.

Phase 1 (8 min) : Présentation du problème

Vidéo-projeter le problème. Lecture individuelle, puis collective par un élève.

L'enseignant demande s'il y a des questions.

Phase 2 (5 min) : Recherche individuelle

L'enseignant observe les élèves travailler sans intervenir. Il prend des indices et agit selon la grille d'intervention p.36.

Phase 3 (15 min) : Recherche en groupe

L'enseignant informe les élèves qu'ils vont travailler en groupe (et qu'ils ont du matériel à disposition s'ils en ont besoin).

L'enseignant donne du matériel si besoin et dit : « Élaborer une réponse commune pour le groupe avec critère de validation. Cette réponse sera présentée oralement. »

Pause : à la récréation (15-20 minutes)

Phase 4 (30 min) : Bilan

Présentation orale de la réponse de chaque groupe. Si le prochain groupe n'a rien ajouté, on passe au suivant (efficacité)

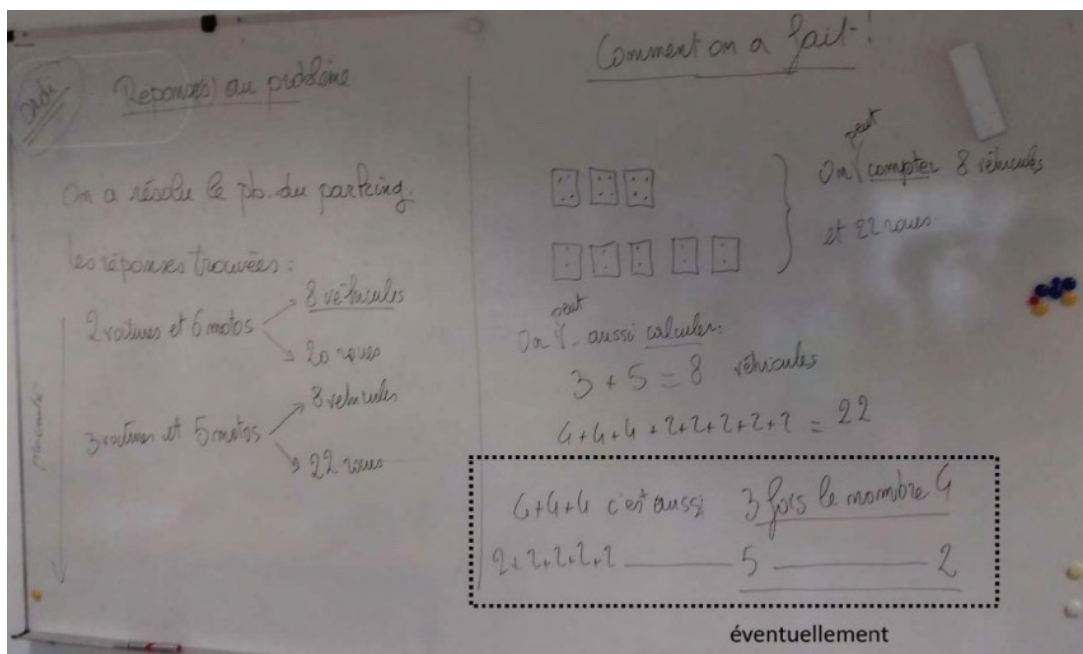


Tableau prévu par le collectif, LS Garage, Verson, 2021

Présenter la(les) réponse(s) sur la partie gauche du tableau puis les démarches utilisées sur la partie droite.

Utiliser des images (avec 4 roues) et des aimants comme sur la figure en p.23.

Montrer aussi les calculs et éventuellement « $4 + 4 + 4$ c'est 3 fois le nombre 4 ».

Analyse *a posteriori* du déroulement effectif (Verson)

Travaux des différents groupes d'élèves

Voici un panorama des productions de l'ensemble des travaux des élèves .

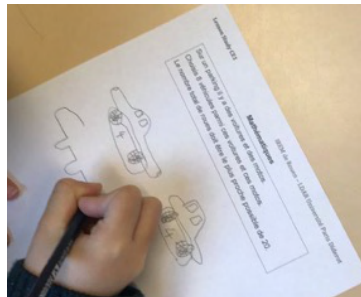
Groupe 1

Recherche individuelle

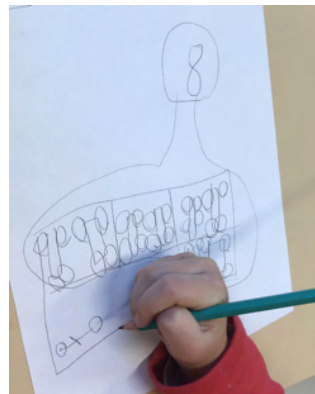
C demande à son groupe : « On dessine les 8 voitures ? »

L : « Ce que tu veux. » puis elle précise à C qu'une moto a 2 roues.

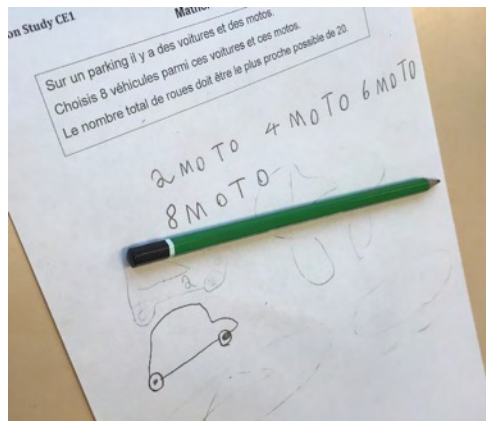
A s'applique à dessiner des voitures et écrit 4 sous chaque voiture.



C : « Je vais dessiner les 8 voitures et après les motos ».

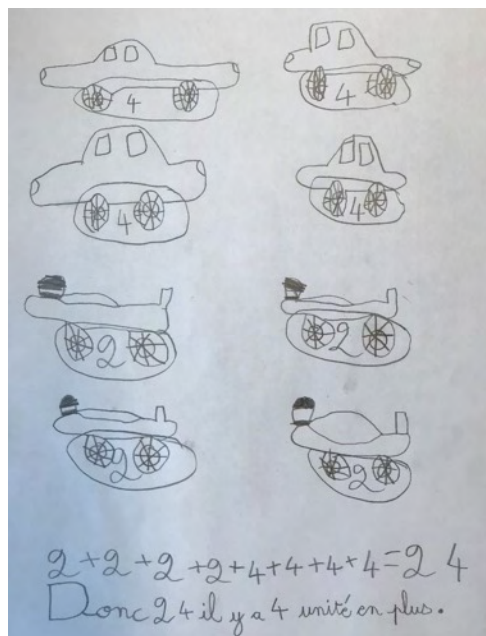


J écrit : « 2 MOTO 4 MOTO 6 MOTO 8 MOTO ».



Recherche par groupe

L explique à C qu'il faut qu'elle ait 8 véhicules, qu'il lui faut aussi des motos et que les motos ont 2 roues. Elle a bien 20 roues mais en utilisant 5 voitures



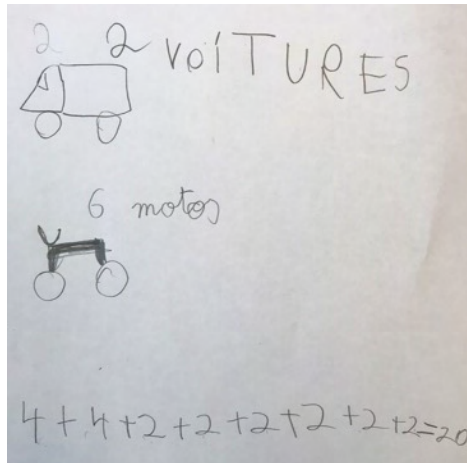
A explique qu'elle va écrire une phrase réponse pour expliquer combien elle en a en plus.

Une élève du groupe : « Faut choisir, quelle solution on choisit ? »

C : « On va choisir celle de A »

Une autre élève se manifeste, C lui répond : « Non parce que toi, t'es pas bonne en maths » ce à quoi l'élève lui répondra : « Et toi tu ne sais pas dessiner les motos et les voitures ».

Les groupes doivent ensuite se mettre d'accord sur la solution retenue. L : « Alors on prend 20 ou 24 ? ». Le choix est arrêté sur la solution apportée par L car : « On a compté et ça se rapprochait le plus de 20. »

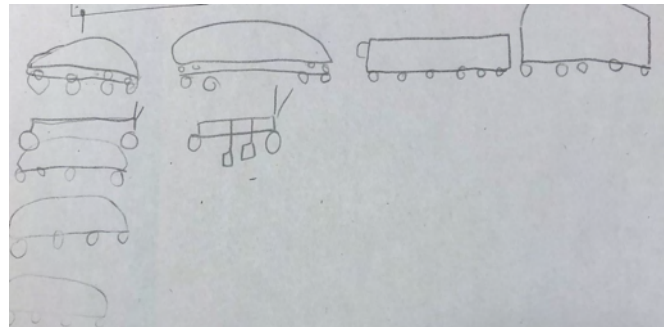


Groupe 3

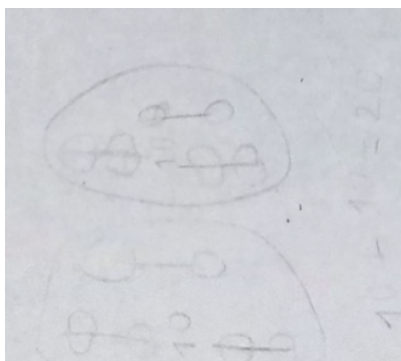
Recherche individuelle

Le démarrage a été difficile pour N, C et Z. Elles se sont regardées longuement au moment du lancement du temps de travail individuel, puis Z commence à dessiner et utilise ses doigts pour compter en même temps. Elle compte de 1 en 1 les roues.

N choisit de dessiner des roues et les regroupe en deux paquets et écrit 10 dans l'un, puis $10 + 10 = 20$. Son dessin montre deux voitures et une moto dans un paquet et elle refait le même dessin à côté pour avoir 20 . Mais ses dessins ne ressemblent ni à des voitures ni à des motos.



Intervention de l'enseignant-expérimentateur « Relis ton problème et vérifie si ça correspond bien ». Z lui fait remarquer qu'on ne voit pas de différence entre ses motos et ses voitures. N décide de tout gommer. Elle a trouvé une solution en quelques minutes, et ne l'a pas expliqué aux autres.



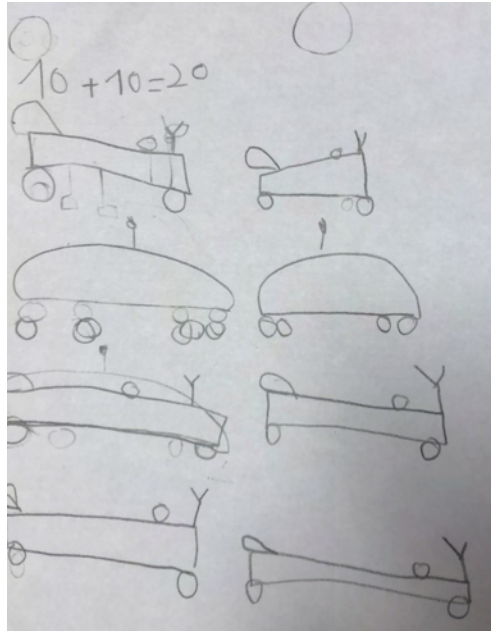
Mathématiques

Sur un parking il y a des voitures et des motos.
 Choisis 8 véhicules parmi ces voitures et ces motos.
 Le nombre total de roues doit être le plus proche possible de 20.

C dessine 4 véhicules et 12 roues.

Recherche en groupe

N et Z se demandent comment faire, elles regardent leur feuille et attendent puis Z demande à C qui ne répond pas. Z propose de dessiner une “vraie voiture” et donne la feuille du groupe à N. N ne dessine pas et Z reprend la main et dessine des voitures à 2 roues ou 8 roues.



Après l'intervention de l'enseignant-expérimentateur, Z gomme des roues “en trop”. N compte alors les roues des voitures et arrive à 8 et C compte alors de 2 en 2 en disant qu'il suffit d'ajouter des voitures ou des motos. N reste sur sa procédure initiale, dit qu'il faut mettre des motos pour faire 10 et que l'on aura plus qu'à refaire la même chose après pour arriver à 20 car $10+10=20$. Les 8 véhicules n'ont pas été évoqués mais une solution est trouvée répondant aux deux critères.

Groupe 4

Recherche individuelle

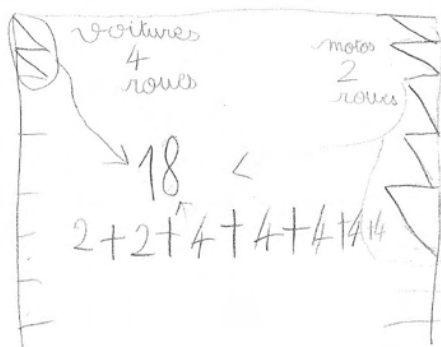
Pendant cette phase, les 4 élèves ont produit 4 réponses différentes. Aucun élève n'a trouvé la réponse optimale mais chaque élève s'est lancé dans la recherche et a produit une réponse.

M a dessiné des voitures et des motos mais tous ses véhicules ont 2 roues.

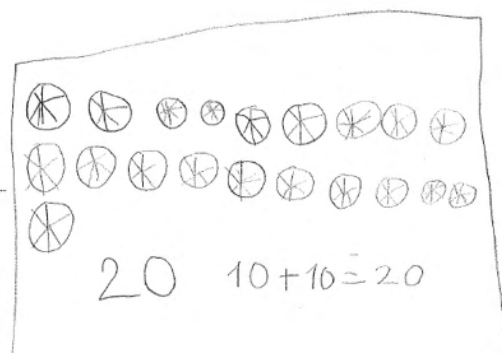
G n'a pas pris en compte la contrainte du nombre de véhicules. Il parvient à la réponse 5 voitures soit 20 roues.

S passe du schéma à une écriture mathématique mais elle a interverti le nombre de roues des voitures et des motos.

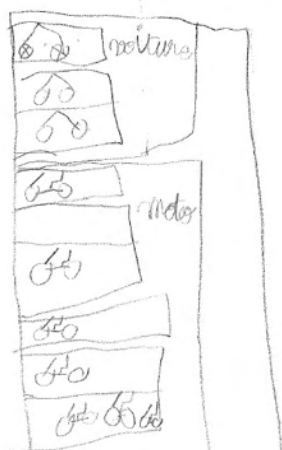
T est la seule élève du groupe à raisonner à partir du nombre de roues mais elle n'effectue pas de groupements pour représenter les véhicules.



Production de S



Production de T



Production de M



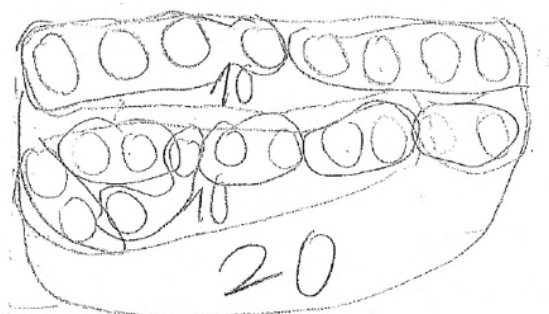
Production de G

Recherche en groupe

Après discussion, les élèves parviennent, sous l'impulsion de G, à adopter une méthode commune (celle de T) : partir du nombre de roues (20) et effectuer des groupements de 4 ou de 2.

Cependant, la feuille collective du groupe est découpée en 4 parties ; chacun travaille de son côté mais avec une méthode similaire.

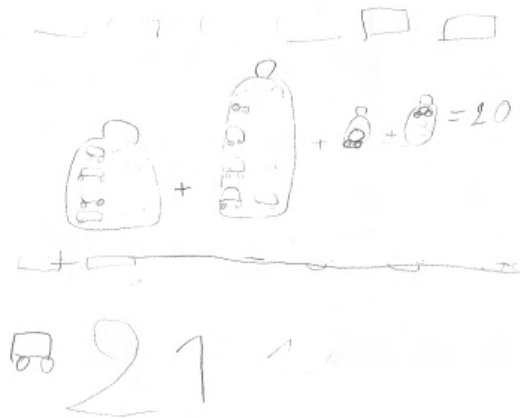
Certains prennent en compte la contrainte du nombre de véhicules et parviennent à la réponse optimale (S et M), d'autres non (G) : 4 voitures et 2 motos, et T fait des groupements de 3 roues et ne réalise pas son erreur.



Groupe 5

Recherche individuelle

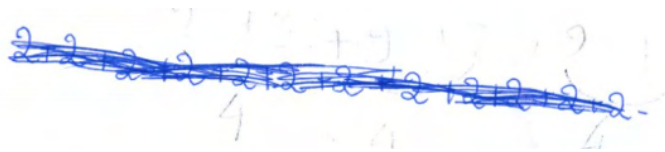
Les quatre élèves du groupe I, C, K, et E ont représenté des véhicules et compté les roues. I dessine 8 voitures, elle compte 32 roues de 2 en 2 : 2, 4, 6, etc. Elle s'interdit de représenter des motos. Elle obtient 32 roues, le fait que ce résultat soit proche ou non de 20 n'est pas évoqué.



Production de E

Recherche en groupe

En fin de séance, la feuille de groupe était restée vierge, sans discussion sur les solutions individuelles, les 4 élèves ont écrit leur propre phrase en commençant par I. En toute fin de séance, quand l'enseignant-expérimentateur met en valeur les calculs, I a tenté d'ajouter le sien. L'enseignant lui fait remarquer et I barre.



Par rapport au scénario initial, le collectif a souhaité apporter les modifications suivantes

Alternatives

La forme de l'énoncé qui demande de choisir un nombre de véhicules avec la contrainte « le plus proche de » a amené de la richesse dans les interactions à l'intérieur des groupes mais aussi de la richesse dans le bilan. Tous les groupes ont apporté au moins une solution. Nous reviendrons plus tard sur les difficultés que cette richesse a engendré lors du bilan.

En ce qui concerne les objectifs fixés au départ, un certain nombre d'élèves se sont appuyés uniquement sur des représentations (des dessins concrets, des représentations iconiques) qu'ils avaient faites afin de compter le nombre de roues. D'autres, comme prévu se sont appuyés sur des représentations auxquelles ont été associées des enchaînements d'opérations.

3 voitures et 5 motos
4 voitures et 3 motos
6 voitures et 2 motos.

Une production non discutée, contrainte « 8 véhicules » non respectée.

Finalement, le bilan prévu a été jugé beaucoup trop long par le collectif et difficile à suivre pour les élèves.

Toutes ces remarques ont permis de mettre à jour la feuille de route.

Le scénario repensé

Phase 1 - Présentation du problème

Le collectif n'a pas souhaité modifier l'énoncé, celui-ci permettant une diversité de réponses. A noter que l'absence de question n'a pas posé de problèmes, les élèves s'étant lancés dans les recherches. Un objectif supplémentaire a été fixé pour cette phase de présentation du problème : **comprendre le vocabulaire.**

Phase 2 - Recherche individuelle

Des précisions ont été apportées concernant plusieurs points de cette phase essentielle :

- un objectif supplémentaire a été ajouté : comprendre ce qu'on cherche ;
- le temps de travail doit être limité si l'on veut que tous les élèves aient le temps **d'entrer dans le problème** et qu'**aucun ne puisse aboutir** ;

L'objectif est d'engager les élèves plus facilement dans les échanges, vers une production collective tout en se questionnant sur les capacités des élèves à échanger à partir de productions individuelles non-abouties.

Phase 3 - Recherche en groupe

L'objectif de cette phase a été précisé : **résoudre le problème.**

Le choix a été fait de formaliser davantage des « critères de réussite » : 8 véhicules parmi des voitures et des motos, 20 roues comme objectif. Les donner aux élèves par écrit (tableau, « carte critère de réussite »), réalisation d'un travail commun.

Enfin, afin que les élèves échangent autour d'une ou plusieurs solutions, l'enseignant devra préciser aux élèves qu'il faut impérativement proposer une feuille choisie par le groupe.

Phase 4 - Bilan

Des objectifs nouveaux et les moyens pour les atteindre ont été proposés autour de la phase de bilan :

- mettre en valeur la solution optimale par rapport aux autres (2 voitures et 6 motos) ;
- mettre en valeur les groupes ayant proposé une production commune ;
- gérer la variété des productions qui a rendu difficile la menée du bilan.

L'analyse de la mise en commun réalisée a amené le collectif à restructurer l'organisation du bilan mais aussi à prévoir celle du tableau.

Restructuration *a posteriori* de l'organisation du bilan et tableau

Pour gérer la multitude des réponses proposée par les élèves, le collectif a souhaité mieux organiser la phase de bilan.

Pendant la pause, le tableau, partagé en trois parties est préparé. À gauche un tableau viendra recueillir les réponses des élèves, au centre leurs productions seront vidéo-projetées et la partie droite du tableau servira à vérifier ou valider les propositions des groupes.

Réponses des groupes				Zone des travaux d'élèves vidéo-projetés	Validation/vérification du nombre de roues (par le collectif)
Nombre de voitures	Nombre de motos	Nombre de véhicules	Nombre de roues		

L'enseignant fait produire une réponse avec un nombre de voitures et un nombre de motos (et pas seulement un nombre de roues). Le nombre de roues est vérifié rapidement pas le collectif.

Réponses des groupes				Zone des travaux d'élèves vidéo-projetés	Validation/vérification du nombre de roues (par le collectif)
Nombre de voitures	Nombre de motos	Nombre de véhicules	Nombre de roues		

Pour valider le nombre de roues, on prend appui sur le matériel prévu. Il faudra prévoir des aimants et faire se chevaucher les images.

Réponses des groupes					Zone des travaux d'élèves vidéo-projetés	Validation/vérification du nombre de roues (par le collectif)
	Nombre de voitures	Nombre de motos	Nombre de véhicules	Nombre de roues		
G1	2	6	8	20		

Des écritures mathématiques viendront compléter la vérification.

Réponses des groupes					Zone des travaux d'élèves vidéo-projetés	Validation/vérification du nombre de roues (par le collectif)
	Nombre de voitures	Nombre de motos	Nombre de véhicules	Nombre de roues		
G1	2	6	8	20	<p>2 VOITURES</p> <p>6 motos</p>	 $4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20$

Si une réponse ne respecte pas la contrainte du nombre de véhicules, celle-ci est écrite, invalidée par la collectif puis barrée. Le nombre de roues peut être indiqué.

Réponses des groupes					Zone des travaux d'élèves vidéo-projetés	Validation/vérification du nombre de roues (par le collectif)
	Nombre de voitures	Nombre de motos	Nombre de véhicules	Nombre de roues		
G1	2	6	8	20		 $4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20$
G2	4	2	6	20		

Si une solution comporte une erreur sur le nombre de roues, celle-ci est notée dans le tableau des réponses puis discutée par le collectif.

Réponses des groupes					Zone des travaux d'élèves vidéo-projetés	Validation/vérification du nombre de roues (par le collectif)
	Nombre de voitures	Nombre de motos	Nombre de véhicules	Nombre de roues		
G1	2	6	8	20		 $4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20$
G2	4	2	6	20		
G6	6	2	8	20		

Pour corriger le nombre de roues, l'enseignant prendra appui sur la partie droite du tableau avec les images et les écritures mathématiques. Sur la partie gauche, le nombre de roues sera corrigé.

Finalement, la solution optimale sera inscrite au tableau.

Réponses des groupes					Zone des travaux d'élèves vidéo-projetés	Validation/vérification du nombre de roues (par le collectif)
	Nombre de voitures	Nombre de motos	Nombre de véhicules	Nombre de roues		
G1	2	6	8	20		 $4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20$
G2	4	2	6	20		
G6	6	2	8	28		
						 $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 2 + 2 = 28$

Cette organisation permet de prendre efficacement en compte les travaux des élèves tels qu'ils sont puis de les vérifier en utilisant des représentations concrètes mais aussi en mathématisant la situation.

Grille d'Interventions possibles de l'enseignant (Verson)

Elle comprend les interventions initialement imaginées en amont de la leçon de recherche en noir puis celles imaginées a posteriori en bleu

Phases	Déclencheur d'intervention	Interventions	Effets attendus, buts
1	Pourquoi n'y a t-il pas de question ?	Renvoi à la classe : qu'est-ce qu'on nous demande de faire ?	L'élève comprend ce qu'il doit faire. Se met au travail
1	Véhicule ?	Remettre ce qui a été vu la veille.	Clarifier le vocabulaire.
1	Question sur « le plus proche de »	En peu en dessous, un peu dessus ou même égal. Autour de 20. S'appuyer sur la frise numérique de 1 à 100.	
2	Un élève ne fait rien de visible.	Ne pas intervenir du tout. L'inciter à faire quelque chose. Le faire verbaliser en chuchotant.	Le mettre au travail.

3	Des solutions contradictoires (nb de véhicules) dans un groupe	Rappeler les critères (8 véhicules et 20 roues) → matériel	
3	$20 + 8 = 28$ ou autre réponse du même type	Demander « 28 quoi ? » et explicitez votre configuration. → matériel	
3	Un groupe propose un nombre de véhicules qui ne convient pas	Renvoyer aux critères de réussite.	Adopter une posture de validation. Rendre objectif les arguments. Lâcher prise (pour l'enseignant). Clarifier l'évaluation.
2, 3	Un élève propose un véhicule à 6 roues.	Mettre à disposition de chaque groupe une image de voiture et une image de moto.	Rendre visible la représentation.
2, 3	D'autres véhicules émergent.	Renvoyer aux critères de réussite.	Adopter une posture de validation. Rendre objectif les arguments. Lâcher prise (pour l'enseignant). Clarifier l'évaluation.

4. Le mot de l'équipe de formation-recherche

Voici un retour sur les questions soulevées par « Garage » lors de cette Lesson Study.

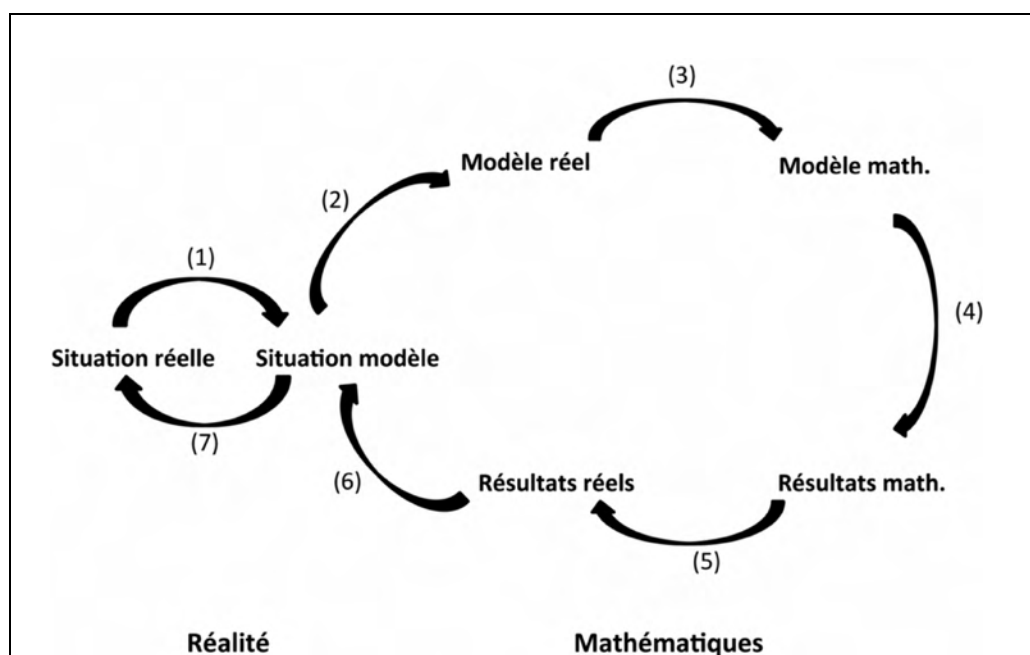
Une question commune soulevée par les phases de bilan

Ces deux LS ont soulevé la question de l'articulation entre le travail produit dans les groupes d'élèves et l'objectif collectivement fixé par les enseignants. Elles ont permis un réel travail sur la phase délicate de bilan et d'institutionnalisation trop souvent délaissée en classe, avec une anticipation plus fine des imprévus. La prise en charge de cette phase de bilan a évolué au fil des réalisations, avec hiérarchisation des procédures des élèves comme attendu dans le Guide Orange CP (MEN, 2020). Lors du travail des élèves, une alternative possible pourrait être de réaliser une phase de bilan intermédiaire qui consisterait en l'explicitation de procédures engagées et en cours dans les différents groupes avant de poursuivre les recherches.

La question de la modélisation autour de la situation « Garage »

Pour ces apports didactiques, nous nous appuyerons sur le cycle de modélisation de Blum & Leiss (2005) même si ce cycle dépasse largement la situation du garage et est plus adapté à des situations où la mathématisation du réel est plus riche.

Ce cycle permet d'éclairer ce qui peut se passer en classe et de prendre conscience que les élèves comme les enseignants font des allers-retours en mathématiques et monde réel et ne cessent d'entre et de sortir de ce cycle. "



Le cycle de modélisation de Blum & Leiss (2007), étapes traduites par Derouet (2016)

Le cycle de modélisation une figure en forme de cycle en **7 étapes**.

- Le point de départ est une situation du monde réel. **L'étape (1)** consiste à l'épurer et à la préciser. C'est le moment de l'émission de premières hypothèses de modélisation.
- À **l'étape (2)**, on élabore ensuite un premier modèle simplifié mais pas encore mathématisé. On peut parfois parler de *pré-mathématisation*.

- **L'étape (3)** est l'association d'un modèle mathématique au modèle réel. Ce modèle mathématique est soit disponible, soit adapté ou construit à cette étape.
- Il est suivi d'un traitement mathématique, qui aboutit à des résultats (**étape (4)**).
- Ces résultats sont interprétés dans le langage réel (**étapes (5)**).
- Ils sont validés ou invalidés dans l'**étape (6)**. Dans le cas d'une invalidation, le cycle est réitéré, en adoptant un modèle modifié.
- **L'étape (7)** consiste en la communication des résultats dans la situation dans le monde réel.

Concernant la situation « Garage » :

- **L'étape (1)**

Dans cette situation, il n'y a pas vraiment à simplifier et structurer le réel comme dans de vraies situations de modélisations. Le texte fournit déjà en quelque sorte une situation modèle. Le problème « Garage » est ce que l'on peut appeler un « word-problem » (annexe 1), ce n'est pas une situation réelle.

- **L'étape (2)**

A cette étape, on émet les hypothèses suivantes :

- chaque moto a deux roues ;
- chaque voiture est supposée avoir 4 roues. On néglige les roues de secours ;
- les roues sont indifférenciées entre les véhicules.

C'est le passage de la situation « pseudo-réelle » à un modèle réel

- **L'étape (3)**

Dans le cas d'une résolution experte, on prend comme modèle mathématique deux équations du premier degré à deux inconnues en traduisant les contraintes de l'énoncé :

Si x désigne le nombre de voitures et y celui des motos, x et y qui vérifient le système de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$$

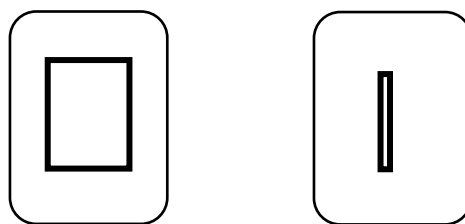
- **L'étape (4)**, c'est la résolution du système précédent dans \mathbb{R} de deux équations à deux inconnues (voir la résolution experte). Le couple solution du système est $(1; 5)$, soit $x = 1$ et $y = 5$.
- **L'étape (5)** Il s'agit d'interpréter les résultats précédents dans la situation modèle, les valeurs trouvées en résolvant le système doivent être à valeurs entières, donc dans \mathbb{N} . Le nombre de voiture est 1 et le nombre de motos est 5.

- **L'étape (6)** consiste à repérer si les résultats sont valides dans la situation modèle. Il s'agit de vérifier effectivement que 1 voiture et 5 motos fournissent bien une solution au problème, c'est à dire que $4 + 5 \times 2 = 14$. C'est une validation de type *quantitatif*. On peut envisager des validations *qualitatives* comme s'assurer que les relations telles qu'exprimées dans le modèle rendent bien compte de la réalité, ou pour des situations plus complexes par la confrontation avec des modèles alternatifs. Dans le cas de « Garage », cela reste assez artificiel puisqu'il ne s'agit pas d'une situation réelle. C'est à cette étape qu'on pourrait invalider une réponse de type 3 voitures et 2 motos car $3 + 2 = 5$ (et non pas 6 véhicules)
- **L'étape (7)** Cette étape n'existe pas vraiment pour la situation « Garage ».

La question de la représentation

Les productions recueillies et analysées dans ce cahier de LS montrent combien un des enjeux de la mathématisation est étroitement lié aux conversions de registres de représentation au sens de Duval (2006). Les deux expérimentations témoignent d'un travail important en lien avec les objets en jeu à représenter. Ce travail reste cependant à questionner quant au temps passé par certains élèves à représenter des voitures et des motos et au peu de conversions de registre vers du langage mathématique lors de la résolution du problème en classe. Ce constat, présent dans les expérimentations, questionne le temps investi dans la représentation des voitures. Il a sans doute été amplifié par le fait que vue de profil une voiture aura deux roues visibles tandis que vue du dessus, elle en possède quatre. Une alternative consiste à proposer des cartes sur lesquelles figurent des rectangles de deux types symbolisant respectivement des voitures et des motos.

La situation « Garage » a été pensée comme une ressource pour élaborer un problème de type « problème pour chercher » préconisé dans les programmes de l'école élémentaire (MEN, 2015). Elle est un support à faire travailler le tryptique « manipuler-verbaliser-abstraire ». L'introduction de cartes (figure contenant des rectangles offre un support d'abstraction qui, s'il demande d'autres efforts que les dessins, permettrait sans doute un engagement plus efficace vers des expressions numériques tout en étant un support d'abstraction.



Cartes symbolisant une « voiture » et une « moto »

Si la situation « Garage » permet d'interroger des éléments clef de la construction dans le domaine pré-algébrique comme le sens du signe égal ou le sens de la variable, nous proposons au lecteur en prolongement une situation étudiée par Favier (à paraître) relevant du même type. La représentation qui fait échos aux éléments analysés précédemment y est ici prise en charge partiellement par les cartes. Cette situation nous semble faciliter l'apparition de relations entre objets mathématiques et pourra s'inscrire dans une progression de résolution de problème. Elle

questionne également les variables didactiques (nombre de véhicules et nombre de roues) choisies par les RMC.

Chaque carte de mon jeu représente soit un triangle, soit un carré. Je tire au hasard 15 cartes. Je compte tous les côtés des figures dessinées sur les cartes que j'ai tirées et je trouve 49. À ton avis, combien ai-je tiré de triangles et de carrés ?

Énoncé du jeu de cartes (Favier, C., à paraître d'après MENSER,2005, p.7)

Cette situation permet de s'éloigner d'une situation concrète pour aller dans un domaine où un pas vers l'abstraction a déjà été franchi.

5. Conclusion

En conclusion, les Référents Mathématiques de Circonscription du parcours LS du plan mathématiques normand ont rencontré un problème atypique, « Garage », dans la typologie d'Houdement (2017),

Selon Houdement,

« les problèmes atypiques (qui ne sont pas des agrégats de problèmes basiques) ont une résolution qui demande la construction d'une stratégie, à défaut d'une ressemblance que percevrait le sujet avec un problème déjà résolu. » (Ibid, p.16)

Nous espérons que ce cahier donnera lieu à de nouvelles expérimentations autour de « Garage » dans des classes. Les deux énoncés inclus dans ce cahier pourraient être envisagés dans une même classe, à des temps distincts. Un enjeu ultérieur serait alors dans un troisième temps, de comparer les procédures engagées pour résoudre ces problèmes qui comportent des similitudes mais pas que.

Enfin, Julo (1995, p. 34) définit trois processus mis en jeu lors de la recherche d'un problème par les élèves :

- le processus de sélection et d'interprétation
- le processus de structuration
- le processus d'opérationnalisation évoqué sous les termes de stratégies, d'outils de modélisation

Pour creuser le sujet, nous invitons le lecteur à s'intéresser aux travaux de recherche de Favier (à paraître) qui s'appuient en particulier sur les processus de Julo(1995). Favier précise les stratégies de résolution du problème du « jeu de cartes » par essais-ajustements lors du traitement de deux grandeurs avec la prise en compte d'une contrainte supplémentaire comme dans le cas de la situation « Garage ».

Remerciements

L'équipe de formation-recherche tient à remercier les acteurs de terrain investis des deux leçons étudiées (élèves et RMC impliqués), ainsi que les acteurs de l'ombre sans qui ce type de formation n'aurait pas vu le jour, à savoir, les Missions Mathématiques et les directions des écoles concernées. Merci également aux membres du LDAR et du groupe « Activités » l'IREM de Rouen impliqués de près ou de loin dans cette formation d'un nouveau genre.

Bibliographie

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. In G.-P. B. W. Haines & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics* (pp. 222–231). Chichester: Horwood Publishing.

Derouet, C. (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse. Étude de la conception et de la mise en œuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral*, Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

Duval, R. (2006). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. Actes du 32^{ème} colloque sur la Formation des Maîtres (pp.67-89). COPIRE-LEM Strasbourg 2005. IREM de Strasbourg

MENESR, Documents d'accompagnement des programmes, Mathématiques, École primaire 2005, p. 7-9.

Favier, C. (A paraître). *Une étude du travail de recherche des élèves en résolution de problèmes. Caractérisation de démarches et gestion des erreurs*. Thèse de doctorat, Université de Genève.

Houdement, C., (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, 100, 59-78

Julo, J. (1995). Représentations des problèmes et réussite en mathématiques, Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

MEN (2015). Bulletin officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015.
http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/35/1/BO_SPE_11_26-11-2015_504351.pdf

MENJS (2020). Le guide Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP. <https://eduscol.education.fr/document/3738/download>

Annexe

Les Word Problems

Dans l'enseignement des sciences, un « word-problem » est un exercice mathématique dans lequel des informations générales importantes sur le problème sont présentées sous forme de texte plutôt que sous forme de notation mathématique. Comme les problèmes de mots impliquent souvent une sorte de récit, ils sont également appelés problèmes à récit et peuvent varier selon la langue utilisée.

Traduit de: https://en.wikipedia.org/wiki/Word_problem_%28mathematics_education%29

- Exemple historique de word problems : *le papyrus de Rhind, Ancienne Égypte*

https://en.wikipedia.org/wiki/Rhind_Mathematical_Papyrus

- Exemple « classique » Un problème d'âge

Anne a trois fois l'âge de son petit frère Bob. Dans cinq ans, elle sera deux fois plus âgée que lui. Quel âge ont Anne et Bob actuellement ?

Clin d'œil normand à Gustave Flaubert qui fait une satire historique des word problems

En savoir plus sur « l'âge du capitaine » dans les classes (Grand N, N°19) Des numéros de la revue Grand N sont accessibles en ligne sur le site de l'IREM de Grenoble.

<https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/numero-19-grand-n/numero-019-grand-n-1979-453189.kjsp?RH=1550438166894>