Cahier de Lesson Study n°5

Années 2018-2019 et 2021-2022

« Casseroles »

Une situation, plusieurs scenarii

Co-écrit par :
Les enseignants participant aux Lesson Studies « Casseroles » en 2018-2019 à Sotteville-Lès-Rouen et à Eu en 2021-2022

L'équipe de formation-recherche :
Amandine Oney (Groupe Lesson Study, IREM de Rouen)
Jordan Martin (Groupe "Activités-Lesson Study", IREM de Rouen)
Frédéric Hartmann (Groupe "Activités - Lesson Study", IREM de Rouen)
Blandine Masselin (Groupe "Activités – Lesson Study ", IREM de Rouen, LDAR, Université Paris Cité)
Caroline Beaudet (Groupe Lesson Study, IREM de Rouen)
Michèle Artigue (LDAR, Université Paris Cité)
Nicolas-Grenier Boley (LDAR, Université Paris Cité)
Laurent Vivier (LDAR, Université Paris Cité)

Avec le soutien de :
Nicolas Gendreau (IA-IPR de l'Académie de Normandie)

ACADÉMIE DE NORMANDIE Liberté Égalité Fraternité
irem Rouen
UNIVERSITÉ DE ROUEN NORMANDIE
LDAR LABORATOIRE DE DIDACTIQUE ANDRÉ REVUZ | RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES SCIENCES

1. Introduction

La situation « Casseroles »

L'équipe de formation-recherche a proposé la situation des « Casseroles » suivante :

Les casseroles

Une entreprise doit fabriquer un grand nombre de casseroles ayant un volume de 1 L.

Un premier modèle est envisagé avec les caractéristiques suivantes:

- le rayon du fond de la casserole est de 7 cm.

- la hauteur de la casserole est de 6,5 cm.

L'un des employés prétend qu'en modifiant les dimensions, il est possible de conserver le volume de 1 L en utilisant moins de matière.

A-t-il raison ?

Énoncé « Les casseroles » proposé en formation LS

Deux Lesson Studies (LS) ont été menées avec des collectifs d'enseignants distincts autour de cette situation et seront décrites dans ce document.
La situation « Casseroles » permet d'approcher la covariation et donc le concept de fonction à partir d'un problème d'optimisation. C'est un point peu commun dans le paysage des manuels scolaires que de proposer à l'élève de s'engager dans une démarche de modélisation autour d'un objet qu'il côtoie au quotidien dans sa cuisine : une casserole. Cette situation sera traitée en classe de mathématiques par des enseignants de mathématiques avec certains choix illustrés dans ce cahier de Lesson Study.
Fort à parier que le travail des élèves serait différent d'ailleurs s'ils résolvaient cette situation en cours de sciences physiques. Des enseignants pourront, pour leur niveau de classe avoir des objectifs variés conformément au programme officiel (travailler au collège sur les grandeurs aires et volumes, pourquoi pas intégrer les TICE pour estimer des volumes avant de mathématiser la situation à l'aide de fonction). Cela pourra mobiliser divers registres sémiotiques.
La tâche s'insère dans les programmes actuels de cycle 4 et de seconde : elle permet un travail selon les attendus des BO et elle met en jeu également des compétences.

Compétences au cycle 4 et au lycée

Cette situation très riche balaie l'ensemble des six compétences mathématiques :
Chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer et communiquer. Nous renvoyons le lecteur au curriculum pour plus de précisions.

BO au cycle 4 et en seconde

La situation permet de travailler des concepts attendus au collège et au lycée d'un point de vue curriculaire sur les grandeurs aires et volumes, sur la notion de fonction.

2. Analyses a priori

Objectifs

L'idée est, à partir de l'énoncé proposé par les formateurs, de faire trouver une solution de cette situation par les enseignants et ainsi amener les élèves à mobiliser les fonctions (que ce soit en termes de ressenti de covariation à l'aide de manipulation de solides, d'estimation de volumes et de dimensions à l'aide d'outils TICE (calculatrice, tableur). Au lycée il s'agit de l'étude des variations d'une fonction après un passage par l'algébrisation des expressions du volume et de l'aire en fonction de variables co-dépendante(s) pour traiter cette situation complexe.

Connaissances mises en jeu

Dans chaque atelier préparant une lesson study, les groupes d'enseignants ont dégagé des objectifs et des éléments d'analyse *a priori* de la situation « Casserole ».

Connaissances mathématiques en jeu

Sotteville-Lès Rouen :

Conversions (cm^2, cm^3, dm^3, 1 L = 1 dm^3)
Volume cylindre
Surface latérale cylindre
Formule disque (surface fond casserole)
Traduire le problème en termes d'inéquation
Notion de fonction (3e modélisation, représentation graphique, calcul littéral, statut de la lettre, tableau de valeurs)
(2nde tableau de variations)
Solides (cylindre)
Ajouter dans l'énoncé « la casserole a une forme cylindrique » ?

Eu :

Calculs de volumes
Calculs d'aires
Conversions :
1 L = 1 dm^3 / 1 L = 1000 cm^3
Exprimer en fonction de / Grandeur en fonction d'une autre
Modélisation
Notion de fonction / tableau de variation / représentation de fonction
Utilisation du tableur ou de la calculatrice (formules)
Calcul littéral

Dimension vie quotidienne

Sotteville-Lès Rouen :

Épaisseur constante (choix du modèle)
- ➔ Précision dans l'énoncé les hypothèses de modélisation ?
- ➔ Ou bien prévoir ce que répondra l'enseignant expérimentateur ?

Dimensions réalistes (si choix d'un autre format de casserole)
Modèle proposé dans l'énoncé déjà proche de la solution optimale

Eu :

Objet du quotidien

Voir un broc cantine

Place dans la progression

Sotteville-Lès Rouen :

Fonction après travail sur les variations en 2nde
5e : construction possible d'un patron
3e : calcul de volume
Notion de fonction, variable (3e)
Fonctions en 2nde ou en 3e (selon ce qu'on attend, selon le moment où on veut traiter le problème, selon la précision attendue pour la solution)

Eu :

2nde : fin ou pendant du chapitre sur les fonctions
Introduire un minimum – tableau de variation - variation de fonction
3e : géométrie dans l'espace
Fin de chapitre sur la notion de fonction (en 3e) – après l'activité sur les boîtes

Dimension TICE

Sotteville-Lès Rouen :	**Eu :**
Calculatrice GeoGebra Tableur	Tableur et calculatrice Géométrie dynamique (GeoGebra) Utiliser l'outil numérique pour aller chercher les formules (aire/volume)

Démarches possibles des élèves

Sotteville-Lès Rouen :	**Eu :**
Calcul du volume Réponse de l'élève : « oui c'est possible » et c'est tout	Calcul numérique : essais-erreurs, puis utiliser le tableur pour être plus efficace Représenter graphiquement (la surface) Modélisation algébrique Construire l'objet sur GeoGebra 3D Fabrication manuelle (patrons) Établir une inéquation / équation Réponse : Non/Oui (on n'a pas demandé de justifier)

Difficultés et erreurs possibles

Sotteville-Lès Rouen :	**Eu :**
Piège « quantité de matière » / volume constant / aire Pour l'utilisation de la calculatrice, seule la variable X est possible (et pas r ou h) Arrondis qui risquent de poser problème.	Les deux variables Connaissance des formules Présence de pi Valeur exacte / valeur approchée Absence d'initiative ; se sentir perdu face au problème Difficulté conversions Matière / surface / épaisseur Oublier le fond Couvercle Forme de la casserole (cylindre ?) Ne faire évoluer qu'une seule variable (soit rayon – soit hauteur fixe) 2 conditions et occulter le 1L Image (casseroles) et dimensions Matière manche (?)

3. Déroulement des deux Lesson Studies

Lesson Study, Lycée Sembat à Sotteville lès Rouen

Déroulement envisagé

Voici l'énoncé donné aux élèves :

Les casseroles

Une entreprise doit fabriquer un grand nombre de casseroles de forme cylindrique et ayant un volume de 1 L.

Un premier modèle est envisagé avec les caractéristiques suivantes :

- le rayon du fond de la casserole est de 5,7 cm.
- la hauteur de la casserole est de 9,8 cm.

L'un des employés affirme qu'en modifiant les dimensions, il est possible de conserver le volume de 1 L en utilisant moins de métal. A-t-il raison ? Argumentez votre réponse.

Énoncé retenu par le collectif de Sotteville lès Rouen, LS « Casseroles », 2018

Disposition de la classe : 9 groupes de quatre élèves, hétérogènes et par affinités, avec des tables regroupées avant l'entrée des élèves en classe.

Objectifs de la séance

Amener les élèves à modéliser la situation et à trouver la fonction de l'aire de la quantité de métal (exprimée de préférence en fonction du rayon).
Tracer la courbe, la décrire (le tracé peut être effectué par l'enseignant expérimentateur)
Déterminer le minimum de la fonction.

Énoncé

Le collectif a décidé d'ajouter l'expression « forme cylindrique » à l'énoncé de départ.
« …. de casseroles de forme cylindrique et ayant un volume de 1 L »
La photo des casseroles sera conservée. Cependant, le collectif décide de laisser un exemple mais de changer celui choisi pour être plus éloigné de la solution. Après plusieurs tests, un consensus fait retenir les valeurs $h = 9{,}8$ cm et $r = 5{,}7$ cm : dans ce cas $V \approx 1000{,}29\ \text{cm}^3$.

La question sera aussi changée comme suit :
« *Est-il possible de conserver le volume ? Justifier / Argumenter* », ainsi que le mot « *matière* » remplacé par le mot « *métal* ».
La question initiale devient donc :
« *L'un des employés affirme qu'en modifiant les dimensions, il est possible de conserver le volume de 1 L en utilisant moins de métal ? A-t-il raison ? Argumentez votre réponse.* »

Matériel

De riches discussions ont émergé dans le collectif sur l'éventualité de ramener de vraies casseroles en classe (idée abandonnée finalement), de prévoir des images de casseroles différentes, sur le fait de prévoir du papier pour une éventuelle construction de casseroles, et de sa taille (A4 ? A3 ?). Le collectif a décidé d'apporter une bouteille d'eau découpée, ainsi que des solides et patrons de cylindres pour la séance de classe.

Modus operandi

Une classe de 2$^{\text{nde}}$ de 30 élèves.
Ramasser une seule feuille par groupe d'élèves

Formation des groupes : Groupes hétérogènes (8 groupes : 6 groupes de 4 élèves et 2 groupes de 3 élèves)
Installation des tables déjà par îlots avec noms sur les tables.
Autoriser l'usage de l'agenda ou le manuel pour retrouver des formules d'aire, de volume de périmètre…

Scénario prévu

Phase 1 : (5 min)
Distribution de l'énoncé et d'un brouillon (feuille blanche)
Lecture de l'énoncé individuelle
Temps de recherche individuel

Phase 2 : (2 min)
Consigne : Possibilité d'utiliser les calculatrices, feuilles (A4, A3)
Le professeur indique qu'il y a une feuille synthèse par groupe à restitue

Phase 3 : (45 min)
Travail en groupe avec production finale
Désigner par groupe un rapporteur
Pause : 15 min Scan des productions des groupes (à la sonnerie de 11h20)

Phase 4 : (30min) Bilan et institutionnalisation
Discussion en plénière : bilan du travail de groupe
Classer les productions de la moins riche à la plus complète, et éliminer les doublons (éviter de laisser les 8 car peu de temps) -> en choisir quelques unes (2 ou 3)
Corriger en donnant la solution : présenter l'expression de la fonction, la représentation graphique. Prévoir une correction papier

Pour achever cette préparation de séance, les enseignants passent commande aux formateurs :

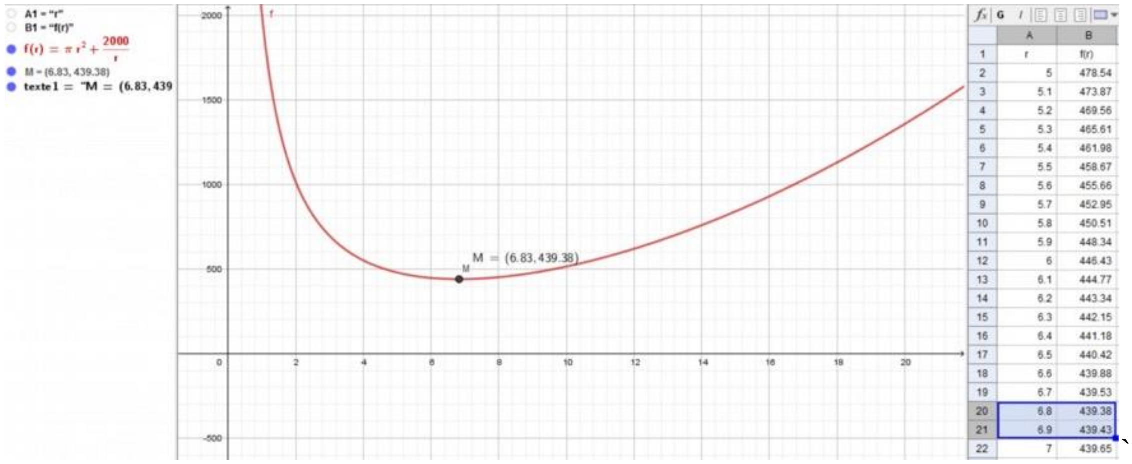
Questions à poser au collègue de la classe :
- Tableur ou GeoGebra déjà utilisés depuis le début de l'année scolaire ?
- Demander si les variations ont été traitées en cours de maths
- Demander que les élèves ramènent du matériel de géométrie (compas, règle, équerre)
- Demander que les élèves rapportent leurs calculatrices
- Demander que les élèves ramènent le manuel

Ils précisent aussi le matériel et ce qu'il reste à faire ou à prévoir pour la séance de classe :
- 2 bouteilles d'eau à prévoir (une « décapitée » et une « ouverte » en patron)
- Solide/Patron à ramener (collège)
- Émulateur calculatrice et captures d'écran
- Fichier GeoGebra et capture d'écran
- Calculatrices de prêt
- Correction papier à distribuer en fin de séance
- Souris scanner pour récupérer les travaux d'élève

La correction préparée entre J1 et J2 a été fixée avec ce contenu :

<u>Corrigé</u>

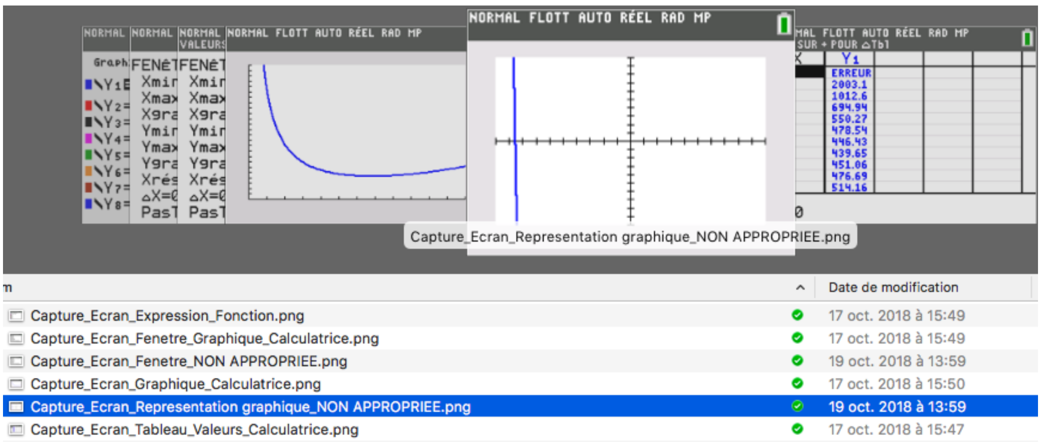
On note h la hauteur en cm de la casserole de forme cylindrique et r le rayon en cm de la base.
Le volume de la casserole $V = \pi \times r^2 \times h$ cm³
On sait que $V = 1L = 1000$ cm³ $= \pi \times r^2 \times h$ cm³.
Donc on peut exprimer h en fonction de r : $h = \frac{1000}{\pi \times r^2}$.
Aire totale du cylindre = Aire de la base + Aire latérale
Aire totale du cylindre $= \pi \times r^2 + 2\pi \times r \times h = \pi \times r^2 + 2\pi \times r \times \frac{1000}{\pi \times r^2} = \pi \times r^2 + \frac{2000}{r}$
On note la fonction $f : r \rightarrow \pi \times r^2 + \frac{2000}{r}$ définie sur $]0\,;+\infty[$
On cherche la valeur de r qui rend l'aire totale minimale.
Avec géogebra, on obtient sur $]0\,;20]$ la courbe de f.



Le minimum de f sur $]0\,;20]$ est obtenu pour $r \approx 6{,}8$ cm au dixième près.

Correction prévue à distribuer aux élèves, LS « Casseroles », Sotteville.

Durant la préparation de cette séance, les enseignants de collège et de lycée ont discuté des calculatrices de leur niveau. Il est apparu un fossé entre les enseignants de collège et de lycée relativement à la connaissance des calculatrices de lycée. Aussi, un point a été abordé sur la une discussion possible du réglage de la fenêtre avec les élèves de 2nde lors de la représentation du graphe de la fonction en jeu. Les formateurs ont alors proposé une série d'images afin de rendre visible à l'ensemble des collègues ces potentialités et de pouvoir éventuellement explorer des pistes à partir de ces photos.



Captures d'écran (émulateur) de calculatrices lycée, LS « Casseroles », Sotteville, 2019

Ces captures se trouvent sur le Drive et agencées ensemble pourront enrichir un scénario.

Analyse a posteriori du déroulement effectif

Débriefing à chaud

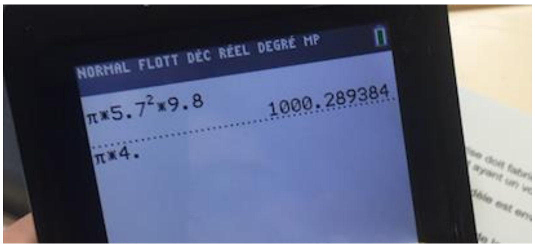
L'enseignant-expérimentateur n'est pas satisfait de la phase d'institutionnalisation alors que le collectif d'enseignants pense qu'il a tiré le maximum du travail mené par les groupes.
Il trouve que beaucoup de temps a été perdu à cause des problèmes de conversion, du nombre de chiffres après la virgule. Seul un groupe (groupe 2) s'est penché sur la quantité de matière, les autres sont restés sur le volume.

Voici un **point saillant** qui a marqué la séance selon le collectif d'observateurs : les élèves sont restés dans le tâtonnement. Ils ont bloqué sur l'expression de la contrainte volume =1L en utilisant leur calculatrice.

Travaux des différents groupes d'élèves

Voici un panorama des productions de l'ensemble des groupes d'élèves de seconde regroupé par 4.

Groupe 1 :
Le groupe passe beaucoup de temps sur des calculs de volume. La première formule est fausse $V = 2\pi * r * h$, Thomas intervient et indique que $2\pi * r$ est le périmètre. Usage de la calculatrice (effet de sa mention lors du lancement du travail par l'enseignant en plénière ?).



Capture d'écran de la calculatrice d'un élève du groupe 1, LS « Casseroles », Sotteville, 2019

Les élèves ont joué sur les dimensions r et h, en réalisant des essais par tâtonnement en enlevant une quantité à h reportée à r, puis en ajustant pour se rapprocher de 1000. À la fin, ils oublient cette contrainte. Se posent la question de diminuer l'épaisseur de métal. Pas de lien avec aire repéré.

Groupe 2 :
Des discussions très intéressantes sur la quantité de métal utilisé et le raisonnement mis en œuvre est intéressant.
Les élèves ont modélisé la quantité de matière comme un empilement de cercles (calcul fait : périmètre de la base × hauteur + aire de la base). Ce modèle n'a pas été envisagé avant la séance par le collectif.

~~Affin~~ Premièrement, nous avons commencés par calculer le périmètre de la base de la casserole.

$P = 2 \times \pi \times 5{,}7.$

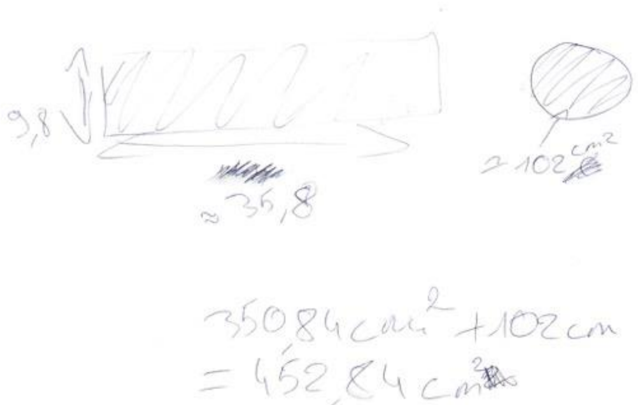
$P \simeq 35{,}8 \text{ cm}^2$

En suite, nous avons calculés le contour de la casserole.

$9{,}8 \times 35{,}8$
$= 350{,}84$

$350{,}84 + 102$
$= 452{,}84 \text{ cm}^2$

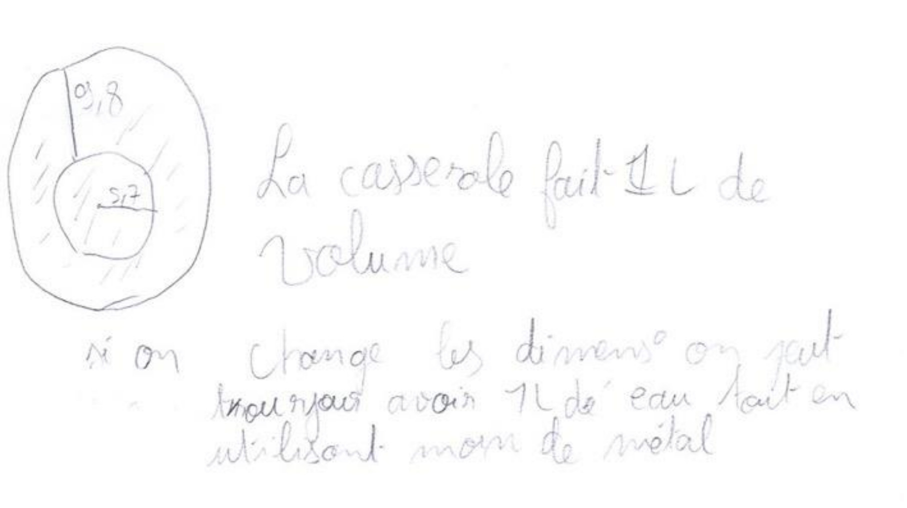
Production du groupe 2, LS « Casseroles », Sotteville



Brouillon d'un élève du groupe 2, LS « Casseroles », Sotteville, 2019

Les élèves sont revenus sur l'aire et l'épaisseur de métal. Ils ont effectué des calculs de valeurs et tâtonnement sur r et h pour obtenir environ 1 L.

Groupe 3 :
Dans un brouillon, il y a la présence du modèle « emboutissage » non relevé lors de l'observation par le collectif d'enseignants.

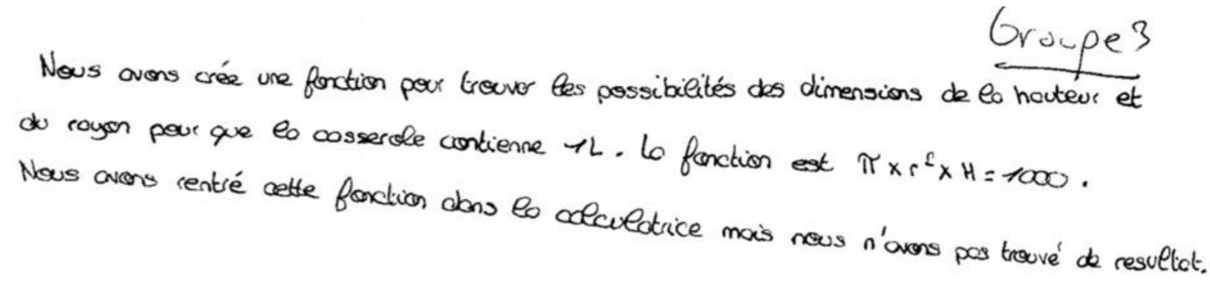


Brouillon d'un élève du groupe 3, LS « Casseroles », Sotteville, 2019

Cette idée initiale a été étouffée par l'emploi de la calculatrice sans qu'il soit maîtrisé. Les élèves ont senti la fonction et tenté de rentrer une formule. Ils ont établi la dépendance entre *r* et *h* établie par $r^2 \times h = 1000$.

Saisies successives sur une calculatrice, groupe 3

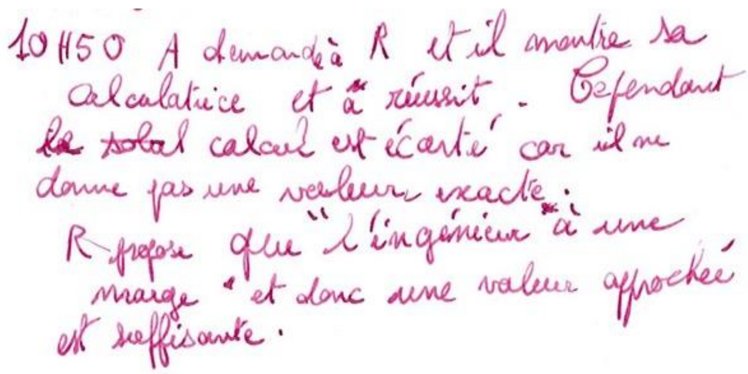
Ils ont alors fait face à un obstacle lié à l'outil car ils n'arrivaient pas à entrer cette formule comme une fonction dans la calculatrice et à observer un graphique.
La production suivante du groupe 3 a été sélectionnée et projetée par l'enseignant expérimentateur dans la dernière phase du scénario.


Groupe 3

Nous avons crée une fonction pour trouver les possibilités des dimensions de la hauteur et du rayon pour que la casserole contienne 1L. La fonction est π x r² x H = 1000. Nous avons rentré cette fonction dans la calculatrice mais nous n'avons pas trouvé de resultat.

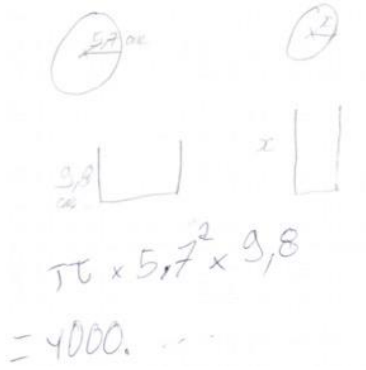
Production du groupe 3, LS « Casseroles », Sotteville, 2019

Groupe 4 :
Très proche du groupe 1, ils tentent des valeurs pour avoir des nouvelles casseroles d'un litre, mais ils sont restés bloqués sur la précision.
Puis ils ont imaginé de la proportionnalité entre *r* et *h*. Ensuite, ils prennent les valeurs de départ (de l'exemple de l'énoncé) et rectifient. Ils ont élaboré un tableau de proportionnalité.
Ce groupe n'a pas compris ce qu'on entend par quantité.
Un membre du groupe a introduit une variable.
Difficulté sur le nombre pi, et sa manipulation dans les calculs instrumentés : pour l'élève A, il n'est pas concevable de calculer en remplaçant π par 3,14.


10H50 A demandé à R et il montre sa
calculatrice et a réussit. Cependant
~~le total~~ calcul est écarté car il ne
donne pas une valeur exacte.
R propose que " l'ingénieur a une
marge " et donc une valeur approchée
est suffisante.

Extrait Fiche Observateur du groupe 4, LS « Casseroles », Sotteville, 2019

L'élève R contre cet argument à l'aide du quotidien (mention de l'ingénieur).
Le brouillon de R témoigne d'une introduction rapide de la lettre, pour autant elle n'est pas exploitée par le groupe.

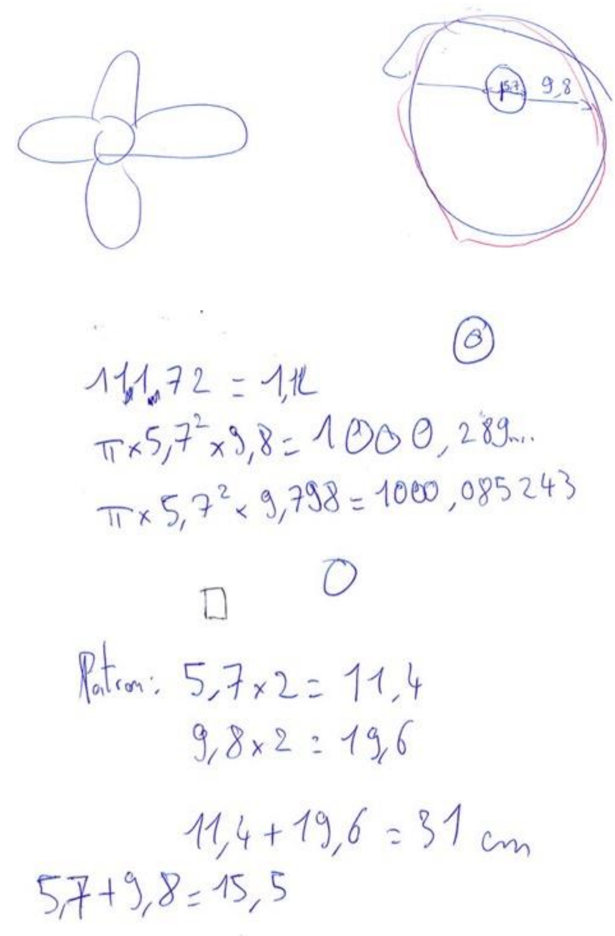


Brouillon de l'élève R du groupe 4, LS « Casseroles », Sotteville, 2019

Dans ce groupe, vers la fin du temps de travail collectif, l'enseignant questionne sur l'aire ce qui crée une incompréhension des élèves car cette notion n'a pas du tout été appréhendée.

Groupe 5 :
Leur procédure est identique à celle des groupes 1 et 2.
Les élèves ont l'idée de diminuer la quantité comme longueur (ôtent 1 cm au rayon et compensent en ajoutant 1 cm à la hauteur. Quand l'enseignant-expérimentateur a indiqué oralement le volume, ils ont hésité entre $\pi \times r^2 \times h$ ou $(\pi \times r)^2 \times h$ (ils n'ont pas eu le formulaire écrit).
Dans un premier temps, ils acceptent que 999,6 mL est proche de 1 L.
Cet argument est ensuite *fauché* par l'intervention de l'enseignant qui dit « Ne peut-on pas forcer les choses pour que cela fasse 1 000 ? »
À partir de là le groupe passe son temps à tâtonner jusqu'à obtenir $1\ 000{,}00001$ L
L'un des élèves dit « ça va être impossible ».

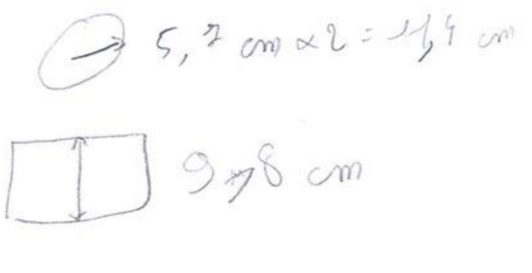
Groupe 6 :
Les élèves se sont questionnés sur 1 L, 1 L = 1 cm ? 1 dm ? La question des unités a pris du temps.
$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$
Le cylindre est mis à plat, et différents patrons sont proposés sur la fin du travail en groupe.
Le périmètre est confondu avec l'aire du cylindre.



Brouillon d'élève du groupe 6, LS « Casseroles », Sotteville, 2019

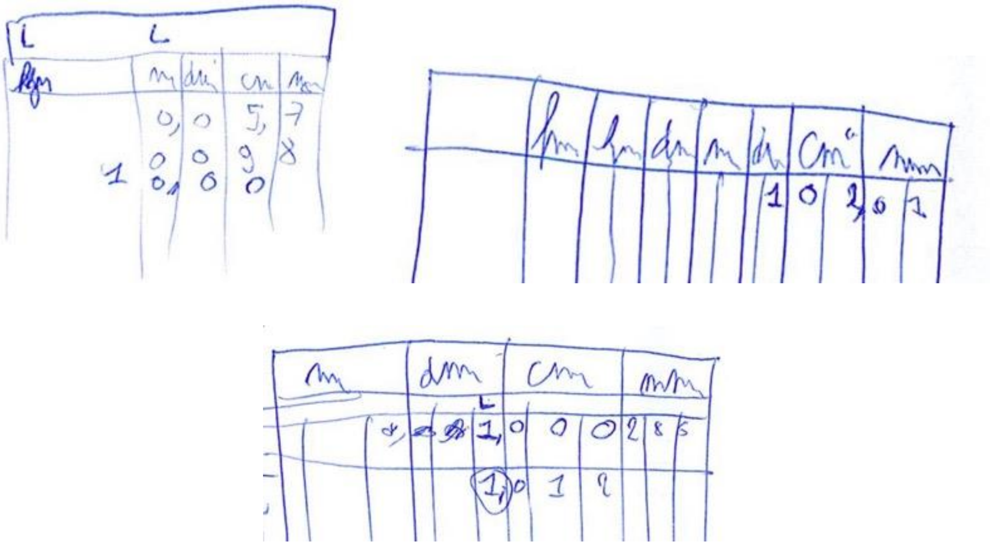
Les calculs montrent qu'il n'y a pas de lien effectué entre le rectangle et le cercle pour le patron.

Groupe 7 :
Comme Gr1 et Gr2, on note des problèmes d'unités, ils hésitent entre cm², cm³, la conversion cm³ en L. Une difficulté de ne pas obtenir 1000 exactement dans l'exemple.
Ils ont réalisé un tableau de conversion faux. Ils sont restés sur la première question.
Un élève a travaillé sur un patron, mais cette idée n'a pas été exploitée par le groupe.



Brouillon d'élève du groupe 7, LS « Casseroles », Sotteville, 2019

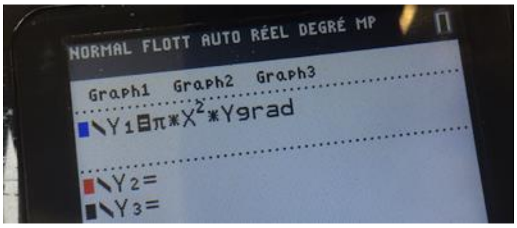
Plusieurs tableaux de conversion ont été tentés.



Brouillon d'élève du groupe 7, LS « Casseroles », Sotteville, 2019

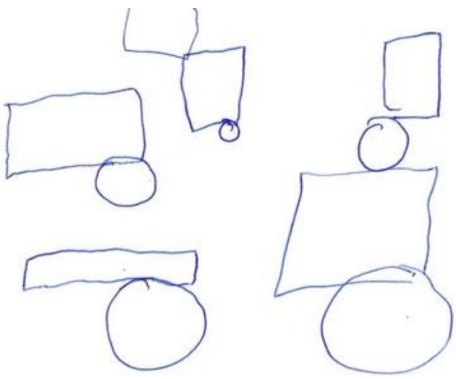
Groupe 8 :

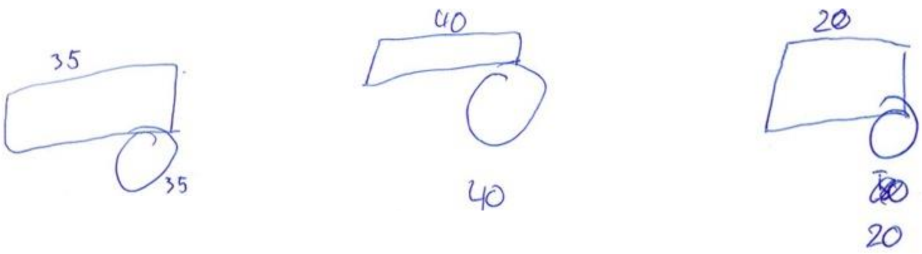
Les élèves sont restés longtemps sur le volume de 1 L. Ils ont eu l'idée de fonction. Et avec la calculatrice, ils ont eu des soucis avec les axes.



Capture d'écran de calculatrice, groupe 8, LS « Casseroles », Sotteville, 2019

Une réflexion émane de la manipulation du patron d'une bouteille d'eau par l'enseignant-expérimentateur dans le groupe. Les élèves remarquent que l'aire est à évaluer pour la quantité de matière. Mais ils n'arrivent pas à trouver la longueur en fonction de r. Un élève réalise des tentatives de patron





Brouillon d'élève du groupe 8, LS « Casseroles », Sotteville, 2019

La bouteille a permis d'établir l'égalité entre longueur du rectangle et périmètre du cercle, mais pas avec le rayon.

Analyse a posteriori du scénario

Phase 1 : (5min)
Trop courte pour certains enseignants, mais si elle est allongée, elle prend du temps sur le travail de groupe.
Phase 2 : (2min)
La mention d'utiliser de la calculatrice a sans doute induit son usage (au départ peu d'élèves les avaient sorties).
Phases 3 : (45min)
Nécessité d'une phase intermédiaire avant celle-ci (entre une phase individuelle et le travail de groupe) pour évacuer plusieurs points en les discutant collectivement :

- lever l'hypothèse de modélisation sur l'épaisseur ;
- donner des formules comme le volume d'un cylindre en éliminant celles fausses par le collectif ;
- parler de la quantité de matière ;
- renvoyer des questions à la classe
- écarter le problème des arrondis de 1000

Phase 4 : (30min)
Réussite dans le fait de convoquer différents groupes dans la synthèse (Gr1, Gr2, Gr5, Gr3) oralement tout en ne conservant que deux écrits de groupes (Gr3 et Gr2).
Thomas a été surpris en questionnant le Gr1 : espérant obtenir la procédure par tâtonnement, la réponse de Baptiste porte sur l'épaisseur.

L'enseignant-expérimentateur a structuré la phase de bilan ainsi :

1. Partir des calculs de volumes avec baisse de h $(-q)$ et hausse de r $(+q)$ (Gr1)
2. Écriture de V= $\pi \times r^2 h$ avec données de l'énoncé (Gr2)
   V= $\pi \times 5{,}7^2$ ×9,8 =1000, 289=1000,3 cm³ **question des arrondis**
3. Lien avec **le litre** ? 1 L ? cm³ passage par 1 dm³
4. Autres essais (Gr5) passage de 9.8 à 8.8 pour h idée de changer les valeurs.
   Ôter 1 cm à h et ajouter 1 cm à r donne un volume non égal à 1 L donc la relation entre r et h n'est pas du type $h - 1 = r + 1$ (problème rencontré dans plusieurs groupes).
5. **Bonne relation entre r et h** (Gr3) avec l'idée d'avoir 1 L
   $\pi \times r^2 h = 1000$, idée de **fonction** rentrée dans la calculatrice Y= $\pi \times r^2 \times h$
   Isoler h pour obtenir $h = 1000/\pi \times r^2$
   Retour sur l'écrit du Gr3 pour vérifier si $r = 6{,}7$ cm alors $h =$? on retrouve 7,09

Thomas prend en charge ce calcul avec sa calculatrice.
L'enseignant expérimentateur verbalise le double enjeu « des casseroles » :
« - *Comment trouver d'autres dimensions pour la casserole ?*
- *Comment faire pour diminuer la quantité de métal* ? »

6. Retour sur les **hypothèses de modélisation** (épaisseur constante).
« *Qu'est-ce qu'il faut changer sur votre patron* ? »

L'enseignant introduit la bouteille qu'il manipule devant la classe entière à son bureau.
Le groupe 2 verbalise alors « *On a mis le tout à plat (rectangle et disque)* »

7. **Deuxième fonction, l'aire**
Thomas « *Avez-vous réussi à exprimer la quantité de métal ?* »
Retour sur la manipulation d'une bouteille plastique (visuellement petit) permettant de relier aire et périmètre.
Il dessine un rectangle et un disque, marque $r\ et\ h$ (9,8 indiqué par Gr2) puis $2\pi \times r$
$A = \pi \times r^2 + 2\pi \times r \times h$
Appui sur Gr2 avec deux calculs pour dire qu'on peut automatiser le calcul.
« Avec r, on calcule $h(r), h$ dépend de $r.$ »
$A(r) = \pi \times r^2 + 2000/r$
Thomas « *A quoi ça vous fait penser cette formule finale ? C'est une fonction.* »
Vérification des calculs « *Pour* r *=5,7 que vaut l'aire ?* »
8. **Visualisation du minimum** avec fichier GeoGebra
Ajout de points
Identification des axes : le rayon en abscisse et la quantité de métal en ordonnée
Travail sur deux points très proches.

Analyse de la phase de bilan et d'institutionnalisation

La chercheure présente indique qu'il serait intéressant de trouver une organisation du tableau en amont de la lesson comme cela est réalisé au Japon.

L'enseignant a mis entre parenthèse les éléments du groupe Gr1 (hypothèses de modélisation) pour les reprendre ultérieurement et a dit être gêné par cette gestion.
Il a été noté peu de lisibilité :
- Au moment de la manipulation de la bouteille d'eau (taille de la bouteille petite pour une grande salle de classe).
- Sur le graphe (réglage GeoGebra peu adéquat).

Il y a eu superposition des icônes de l'ordinateur et des écrits de l'enseignant, puis entre le graphe GeoGebra et ajout d'un cylindre à la main superposé mais qui aurait pu être incorporé au fichier.

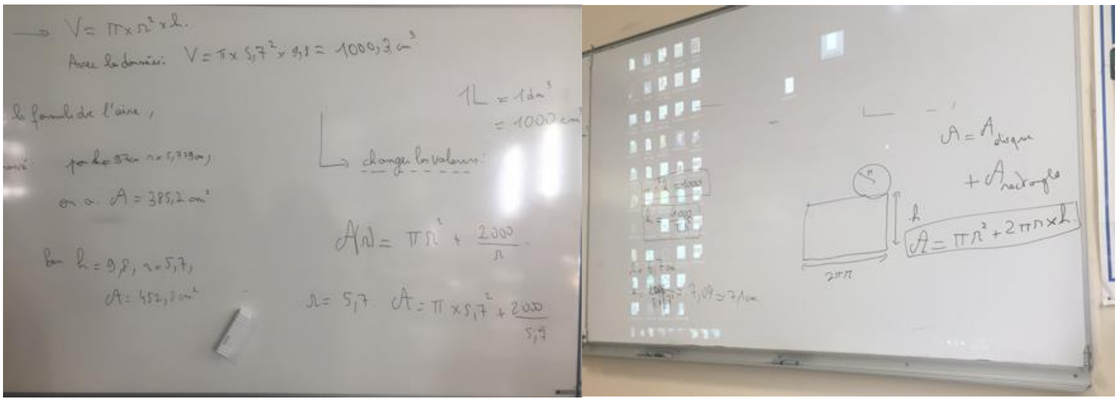


Photo du tableau pendant la phase 4, LS « Casseroles », Sotteville, 2019

Remarques générales :
Débat sur l’utilisation de la calculatrice en mode TAB au collège. Au lycée, le tracé de la fonction est courant mais peut-être pas à cette époque de l’année. Le bilan a été préparé à l’avance et le prof expérimentateur s’y est tenu mais a manqué de temps pour développer les notions. Il serait préférable de le découper. Est-ce une bonne idée de placer cette activité en introduction des variations ?

Remarques de l’observateur global :
Il était trop éloigné et donc ne pouvait pas suivre la démarche de chaque groupe.
Il a impulsé le retour de la bouteille manipulée en phase de bilan et a aidé durant la pause des élèves à structurer la synthèse.
La répartition du temps entre les groupes est difficile. Aider chaque groupe avec le même temps est difficile. Il a été noté qu’un groupe avait été vu une seule fois.

Restructuration a posteriori de l'organisation du bilan et tableau

Le collectif a ressenti la nécessité de structurer les étapes du bilan du tableau a posteriori. Les étapes sont indiquées chronologiquement

Tableau de la salle de classe et étapes du bilan (LS Sotteville)

(1) Réduire l'épaisseur des plaques de métal
(2) Diminuer la hauteur et augmenter le rayon
(3) $V = \pi \times r^2 \times h$
Avec les données $V = \pi \times 5{,}7^2 \times 9{,}8 \approx 1000{,}3\ cm^3$

Rappel de conversions
1 L = 1 dm^3
= 1 000 cm^3

(4) Changer les valeurs (présentation d'un ou deux tests)

(1) Réduire l'épaisseur des plaques de métal
(2) Diminuer la hauteur et augmenter le rayon
(3) $V = \pi \times r^2 \times h$
Avec les données $V = \pi \times 5{,}7^2 \times 9{,}8 \approx 1000{,}3\ cm^3$

Rappel de conversions
1 L = 1 dm^3
= 1 000 cm^3

(4) Changer les valeurs (présentation d'un ou deux tests)

(1) Projection de la vidéo du groupe 3
(relation $\pi \times r^2 \times h = 1\ 000$)

(2) Puis prof écrit relation $h = \frac{1000}{\pi \times r^2}$
(3) Puis prof propose un exemple de recherche de h en ayant choisi r (r = 6,7 cm)
(4) Prof dessine un patron de la casserole au tableau, puis après utilisation de la bouteille pour illustrer la relation longueur/périmètre indique les dimensions du rectangle en fonction de h et r

(1) Réduire l'épaisseur des plaques de métal
(2) Diminuer la hauteur et augmenter le rayon
(3) $V = \pi \times r^2 \times h$
Avec les données $V = \pi \times 5{,}7^2 \times 9{,}8 \approx 1000{,}3\ cm^3$

Rappel de conversions
1 L = 1 dm^3
= 1 000 cm^3

(4) Changer les valeurs (présentation d'un ou deux tests)

Projection du patron du groupe 8 en parallèle avec le patron dessiné par prof

(1) Réduire l'épaisseur des plaques de métal
(2) Diminuer la hauteur et augmenter le rayon
(3) $V = \pi \times r^2 \times h$
Avec les données $V = \pi \times 5{,}7^2 \times 9{,}8 \approx 1000{,}3\ cm^3$

Rappel de conversions
1 L = 1 dm^3
= 1 000 cm^3

(4) Changer les valeurs (présentation d'un ou deux tests)

Stop projection élève

Présentation du calcul de l'aire par décomposition (disque + rectangle)

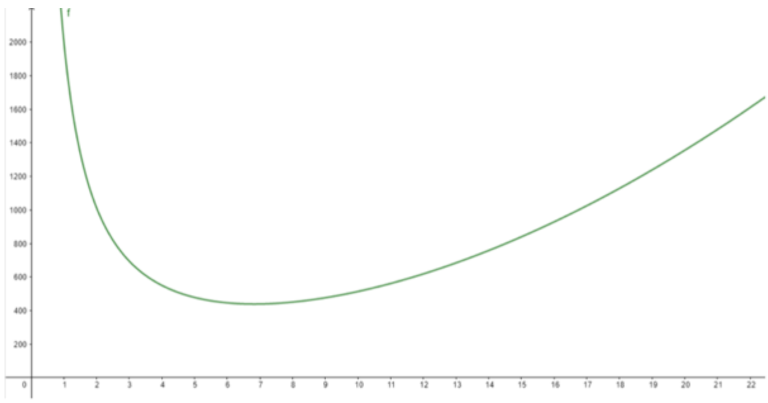
Puis expression de l'aire en fonction h et r, puis de r uniquement

(1) Réduire l'épaisseur des plaques de métal
(2) Diminuer la hauteur et augmenter le rayon
(3) $V = \pi \times r^2 \times h$
Avec les données $V = \pi \times 5{,}7^2 \times 9{,}8 \approx 1000{,}3\ cm^3$

Rappel de conversions
1 L = 1 dm^3
= 1 000 cm^3

(4) Changer les valeurs (présentation d'un ou deux tests)

Projection graphique Geogebra



Grille d'Interventions possibles de l'enseignant

Phases	Déclencheur d'intervention	Interventions	Effets attendus, buts
	Question sur le manche	C'est le même pour toutes les casseroles, il est en plastique	Évacuer la considération du manche de casserole
	Question sur le fond plus épais Question sur l'épaisseur constante partout	C'est la même épaisseur pour toutes les casseroles	Travailler sur un même modèle mathématique
	Les élèves disent qu'il n'y a rien à faire	Proposer d'autres photos de casseroles	Faire varier les dimensions de la casserole Induire des essais
	Difficulté à trouver des dimensions exactes	Le processus industriel accepte une tolérance au centième près	Faire dépasser l'obstacle des arrondis
	Face à plusieurs solutions proposées	Faire calculer le volume (vérifier la contenance d'1 L) puis l'aire	
	Difficulté aire / métal	Faire manipuler avec un patron Prévoir deux bouteilles de 1L (une découpée, une complète) Prévoir le matériel collège avec solide/patron *à la demande dans les groupes*	Relier quantité de métal et aire par visualisation (c'est le prof qui manipule)

	Besoin de formules pour trouver aire, périmètre, volume	L'enseignant vient donner la formule au groupe si la demande est faite (ou accès permis à un formulaire, agenda, livre)	
	Si émergence des deux fonctions : r en fonction de h ou bien *h en fonction de r*	On choisit le modèle le plus accessible à tous (bien qu'un autre modèle existe)	
	Si fonction à deux variables proposée	Contrainte entre r et h (visible via essais/erreurs, on ne peut pas changer l'un sans changer l'autre) L'une dépend de l'autre Fixer une des deux variables en prenant une valeur pour exemple, puis demander à exprimer la 2^{e} variable en fonction de cette valeur	Obtenir une fonction à une seule variable (éliminer une des deux variables)

Lesson Study, Lycée Anguier à Eu

Déroulement envisagé

Voici l'énoncé modifié et fixé par le collectif d'enseignants et donné aux élèves :

Les casseroles

Une entreprise doit fabriquer un grand nombre de casseroles ayant un volume de 1 L.

Un premier modèle est envisagé avec les caractéristiques suivantes :
- le rayon du fond de la casserole est de 7 cm.
- la hauteur de la casserole est de 6,5 cm.

L'un des employés prétend qu'en modifiant les dimensions, il est possible de conserver le volume de 1 L en utilisant moins de matière.
A-t-il raison ?

Énoncé retenu par le collectif de Eu – Le Tréport, LS « Casseroles », 2021

Objectifs de la séance

- Chercher ; Modéliser ; Communiquer
- Dépendance entre hauteur et rayon
- Notion de variation (prolongement)
- Réactivation des formules de volumes et aires
- Tableau : trouver au moins un couple $(r\ ;\ h)$ qui répond à la question

La casserole : TABLEAU de valeurs

Faire varier le **rayon**.	Quelle est donc la **hauteur** pour avoir un volume d'1 Litre.	Vérifier que le **volume** est 1 Litre.	Calculer la **surface latérale**.	Calculer la **surface du fond**.	Calculer la **surface totale**.

Tableau à remplir prévu pour la séance, LS « Casseroles », Eu

Matériel

A priori le collectif n'en a pas prévu alors que durant l'expérimentation en classe, l'enseignante expérimentatrice a présenté des vraies casseroles de formes et volumes variés lors d'une phase de bilan intermédiaire.

Modus operandi

Au préalable : avoir travaillé les formules d'aires et de volumes.

Scénario prévu

Phase 1 (5 minutes) : Lecture individuelle

Phase 2 (5+10 minutes) : Travail en groupe
Constitution des groupes : hétérogènes ; 3 ou 4 élèves
Rôles désignés ? Non
Micro-interventions de l'enseignant expérimentateur (on ne précise aucune formule) : laisser les confrontations d'idées se faire. Objectif : temps de confrontation entre les élèves.
Au bout de 5 minutes,
→ intervention collégiale :
• Au sein de votre groupe, vérifiez si vous avez tous compris la même chose.
• Au sein de votre groupe, mettez-vous d'accord sur une idée commune de démarche.
• Réfléchissez aux outils mathématiques que vous allez utiliser.
→ intervention dans les groupes :
• Reformulation de la consigne
• Suivre la grille d'intervention

Phase 3 (15 minutes) : Phase intermédiaire / mise en commun
Faire appel aux pertinences des actions des groupes
→ Visualisation via GeoGebra
→ Contenances cylindriques d'un litre (hauteur et rayon variables)
→ Présenter des surfaces
Objectifs :
→ S'assurer que les élèves maîtrisent les formules d'aires et volumes
→ Redonner du dynamisme aux groupes qui en ont besoin
→ Insister sur les deux objectifs de la consigne
→ Insister sur les deux contraintes de l'énoncé : volume constant et surface minimale
A prévoir :
→ zone du tableau où on y écrit : formule du volume d'un cylindre, aire de la face latérale, aire de la base, périmètre d'un cercle (illustration : Schéma cylindre ; Papier ; Patron ?)

Phase 4 (25+10 minutes) : Travail de recherche en groupe
Interventions dans les groupes
Au bout de 25 minutes : demander aux élèves de préparer une synthèse de leur recherche

Pause : 15 minutes

Récupérer les feuilles, les photographier/scanner et les sélectionner

Phase 5 (20 minutes) : Bilan et institutionnalisation
→ revenir sur les productions de groupes
→ réponse au problème posé
→ minimum (GeoGebra)

Avant la mise en œuvre du scénario, les enseignants ont préparé la correction suivante :

Compte-rendu : Les casseroles

Situation

Dans ce problème, on s'intéresse à la conception d'une casserole. On cherche à utiliser le moins de matière possible pour fabriquer une casserole de 1L.

Grandeurs pertinentes

Tout d'abord, il faut identifier les grandeurs numériques pertinentes. Dans l'énoncé figurent trois grandeurs numériques :

— Le volume de la casserole, exprimé en litres : 1L.
— Un rayon pour la casserole exprimé en centimètre : 7cm.
— Une hauteur pour la casserole, exprimée en centimètres : 6.5cm.

Le but de l'exercice est de déterminer si il est possible d'obtenir une casserole de 1L, en utilisant moins de matière, avec des dimensions différentes. On s'intéresse donc aussi à :

— La quantité de matière utilisée.

Modélisation

Maintenant, il s'agit de mathématiser le problème. Nous allons considérer que la quantité de matière utilisée est proportionnelle à la surface de la casserole, c'est-à-dire que fabriquer une casserole qui utilise moins de matière, revient à fabriquer une casserole de plus petite aire. On note :

— V, le volume de la casserole
— r, le rayon de la casserole.
— h, la hauteur de la casserole.
— A, l'aire de la casserole.

Pour exprimer le lien entre ces grandeurs, nous allons supposer que la casserole est cylindrique. On a donc :

$$V = \pi r^2 h$$

L'aire de la casserole est composée de l'aire du fond de la casserole, ainsi que de l'aire des bords de la casserole. Le fond est un disque, d'aire πr^2. Le bord a pour aire $2\pi rh$. On a donc :

$$A = \pi r^2 + 2\pi rh$$

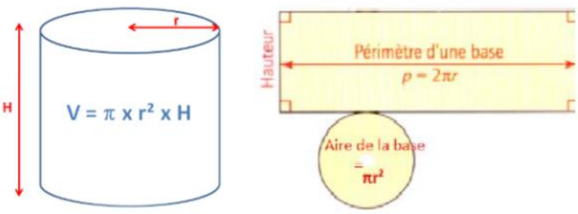


FIGURE 1 – Calcul de l'aire de la casserole

Résolution du problème

Tout d'abord regardons la casserole ayant pour dimensions celles données dans l'énoncé. Pour $r = 7\text{cm}$ et $h = 6.5\text{cm}$, on trouve :

$$V = \pi \cdot 7^2 \cdot 6.5 \simeq 1000\text{cm}^3 = 1\text{L}$$

ainsi que

$$A = \pi \cdot 7^2 + 2\pi \cdot 7 \cdot 6.5 \simeq 439.8\text{cm}^2$$

On veux donc savoir si il est possible d'obtenir une casserole d'un volume d'1L, mais d'une de aire de moins de 439.8cm^2

On pourrait simplement essayer d'autre valeurs pour r et h, le problème est que l'on n'obtiendrait probablement pas un volume d'1L. Cependant, on est capable, pour un rayon donné, de trouver la hauteur correspondant à un volume d'1L. En effet, on doit avoir

$$V = 1L = 1000\text{cm}^3$$

c'est à dire

$$\pi r^2 h = 1000\text{cm}^3$$

et donc

$$h = \frac{1000\text{cm}^3}{\pi r^2}$$

On peut donc remplir le tableau de valeur suivant :

r en cm	6.1	6.3	6.5	6.7	6.9	7.1	7.3
$h = 1000/(\pi r^2)$ en cm	$1000/(\pi \cdot 6.1^2) \simeq 8.554$	8.02	7.534	7.091	6.686	6.314	5.973
$V = \pi r^2 h$ en cm³	$\pi \cdot 6.1^2 \cdot 8.554 \simeq 1000$	1000	1000	1000	1000	1000	1000
$A = \pi r^2 + 2\pi r h$ en cm²	$\pi \cdot 6.1^2 + 2\pi \cdot 6.1 \cdot 8.554 \simeq 444.8$	442.2	440.4	439.5	439.4	440	441.4

A l'aide de ce tableau, on peut voir que pour un rayon de 6.8cm et une hauteur de 6.884cm, on a bien un volume d'1L mais une aire de 439.4cm^2. Il est donc possible d'utiliser moins de matière qu'avec les dimensions de l'énoncé.

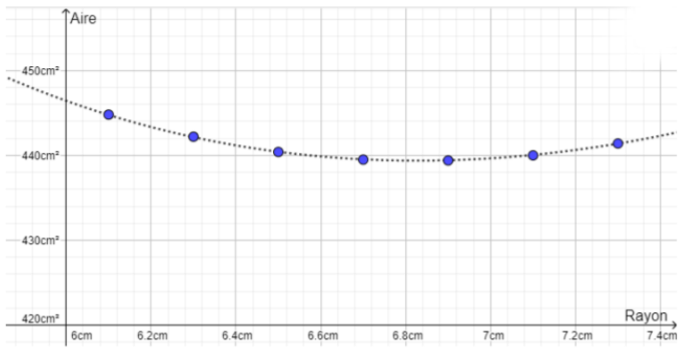


FIGURE 2 – Aire de la casserole d'1L en fonction de son rayon

Correction prévue pour les élèves.

Quand ce document a été partagé sur le groupe à distance, une discussion a été lancée concernant la 2nde page de la correction sur le point suivant : en ayant fait le choix d'arrondir au dixième les valeurs de A, le tableau du document initial présentait r variant entre 6 et 7,4 avec un pas de 0,1. Dans ce cas, les valeurs de $A(6{,}7)$ et $A(6{,}8)$ apparaissaient égales si arrondies au millième près. Suite à l'interrogation levée sur ces choix, le collectif a reconsidéré le tableau en considérant un pas de 0,2.

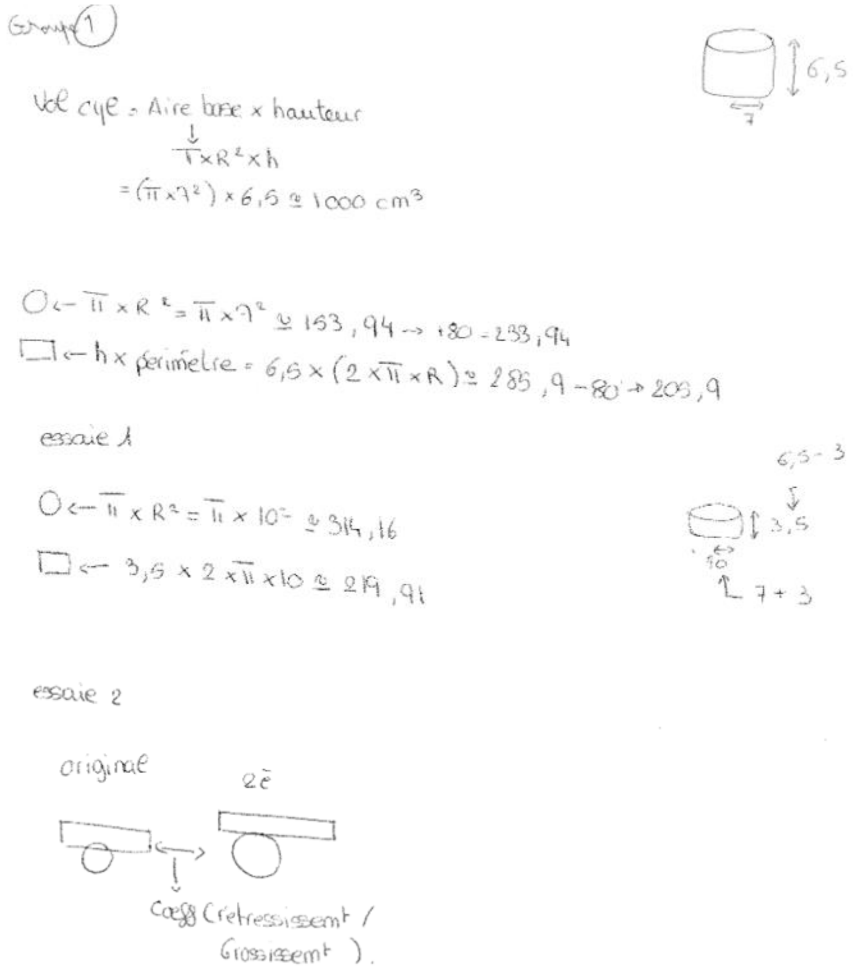
Analyse a posteriori du déroulement effectif

Travaux des différents groupes d’élèves

Voici une sélection de productions de travaux de groupes d’élèves illustrant une variété de procédures.

Groupe 1 :

Le travail initial du groupe a consisté à rechercher des formules. Les élèves les ont trouvés ainsi qu’un patron dans leur agenda. Ils ont alors tenté de les agencer. Ils se sont ensuite concentrés sur les conversions, et ont reconstruit le fait que 1 L est 1000cm^3, y consacrant 30 minutes.
En phase 4, ils ont représenté un patron du cylindre, puis l’ont partagé en un disque et un rectangle (voir ci-après), et ils ont fait deux essais.



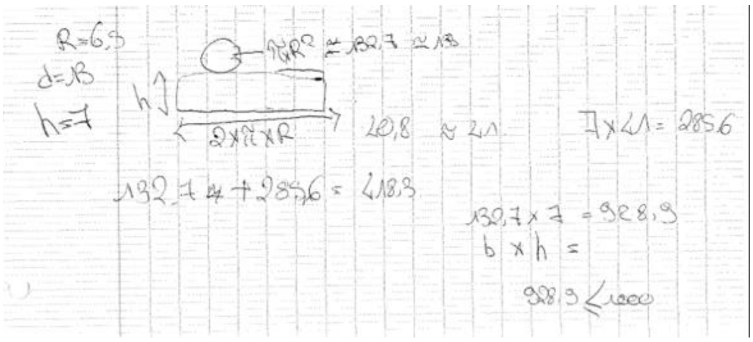
Production du groupe 1, LS « Casseroles », Eu, 2022

Le bilan du groupe relate dans le désordre les modèles testés. L’essai 1 est le final.
L’essai 2 montre que le groupe a convoqué la proportionnalité initialement, sans succès.
Il s’est ensuite tourné vers un jeu de compensation (ajout de 3 au rayon de la base en ôtant 3 à la hauteur). La production finale montre deux calculs d’aires séparés (du côté disque de base et rectangle latéral), mais aucune trace du calcul du volume de la nouvelle casserole. Le seul constat des élèves est que leur casserole a une aire différente de celle de l’énoncé.

Groupe 2 :

Dans la phase 2, le groupe hésite entre les grandeurs volume et aire. Un élève a calculé l'aire du disque de fond et a trouvé 5 m^2. L'un des élèves a alors invalidé ce résultat en indiquant « C'est la dimension de ma chambre ». Ils ont donc décidé de calculer le volume de la casserole et l'un des élèves a parlé de la nécessité d'utiliser un périmètre. Les éléments ont été mentionnés mais aucunement organisés dans un calcul fructueux car un désaccord persistait quant aux grandeurs à préciser pour répondre au problème. La méconnaissance des formules a freiné la réflexion.

En phase 3, une élève du groupe a tenté des essais successifs de calcul d'aire en faisant varier rayon et hauteur, sans lien entre rayon et hauteur établi. Le lien entre matière et surface a posé problème à deux élèves sur les quatre qui ont été aidé par les explications d'une troisième élève. Il a été finalement perçu que si r augmente, h diminue mais le lien entre les deux variables n'a pas été explicité. La production ci-dessous montre un emploi des formules données par l'enseignante, avec, comme pour le groupe 8, en intervertissant les valeurs de r et h données dans l'exemple de l'énoncé.



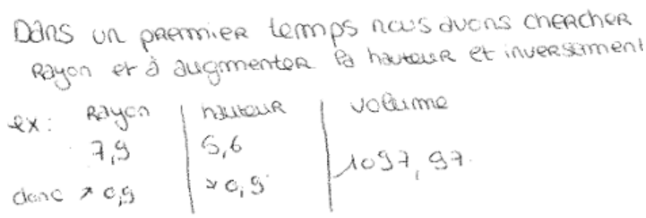
Extrait de production du groupe 2 (fin), LS « Casseroles », Eu, 2022

Groupe 3 :

Le groupe a initialement considéré « le moins de matière possible » en souhaitant désépaissir le métal de la casserole et l'enseignante expérimentatrice est intervenue pour réorienter le travail en disant :

P « *On va s'occuper de la surface, sur quelles dimensions faut-il jouer pour avoir moins de surface.* »

Un des élèves est persuadé que l'aire reste constante étant donné le volume fixe de 1 L. Le groupe, finalement, modifie les valeurs malgré tout et procède comme dans le groupe 1 (essai 1) à une même quantité ajoutée et retranchée (ici 0,9). Ils calculent alors les volumes et ne trouvant jamais 1 L, ils invalident les couples (r, h) testés et ne ressentent jamais la nécessité de calculer l'aire de la surface de métal.



grp 3

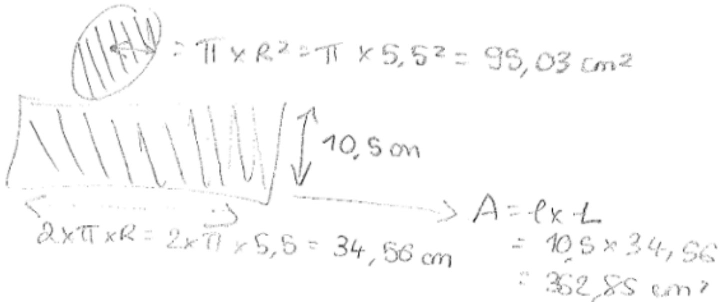
La casserole : TABLEAU de valeurs

Faire varier le **rayon**.	Quelle est donc la **hauteur** pour avoir un volume d'1 Litre.	Vérifier que le **volume** est 1 Litre.	Calculer la **surface latérale**.	Calculer la **surface du fond**.	Calculer la **surface totale**.
5	8,5	667,6			
3	10,5	296,88			
9	4,5	~~1000~~ 1145,11			
8,5	5	1134,90			
7,5	4	706,85			
8	5,5	1105,84			
7,9	5,6	1097,97			
7,8					
7,65	5,85				

Production du groupe 3, LS « Casseroles », Eu, 2022

Groupe 5 :

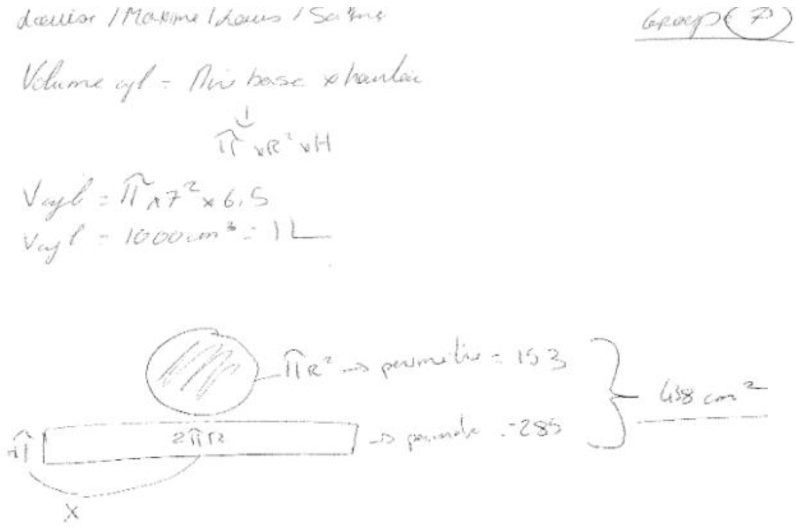
Le groupe ne réalise pas de production finale. Cependant, sa procédure est originale et mérite d'être relatée. Partant de la contrainte du volume de 1 L, les élèves font une première division : $1000 : 8 = 125$, puis recherchent un rayon r pour la hauteur $h = 8cm$ en divisant 125 par π puis en considérant la racine carrée du résultat. Une élève dit qu'il faut diviser par π et prendre la racine carrée et un autre élève propose alors d'écrire l'équation suivante : $125 = \pi \times r^2$
S'en suit une erreur de traitement algébrique : $\pi : 125 = r^2$.
Puis ils écrivent $\sqrt{\pi : 125} = \sqrt{r^2}$.
Ils abandonnent ensuite l'équation et partent sur des essais de couples (r, h) qui les font s'éloigner temporairement de la contrainte 1 L.
Considérant un rayon $r = 5{,}5$, ils calculent l'aire de la base et trouvent environ 95 puis en divisant 1000 par cette valeur, ils trouvent pour h environ $10{,}5$. Ils ont alors calculé un volume et reviennent à la quantité de matière (362,85 cm²).



Extrait du brouillon d'un élève du groupe 5, LS « Casseroles », Eu, 2022

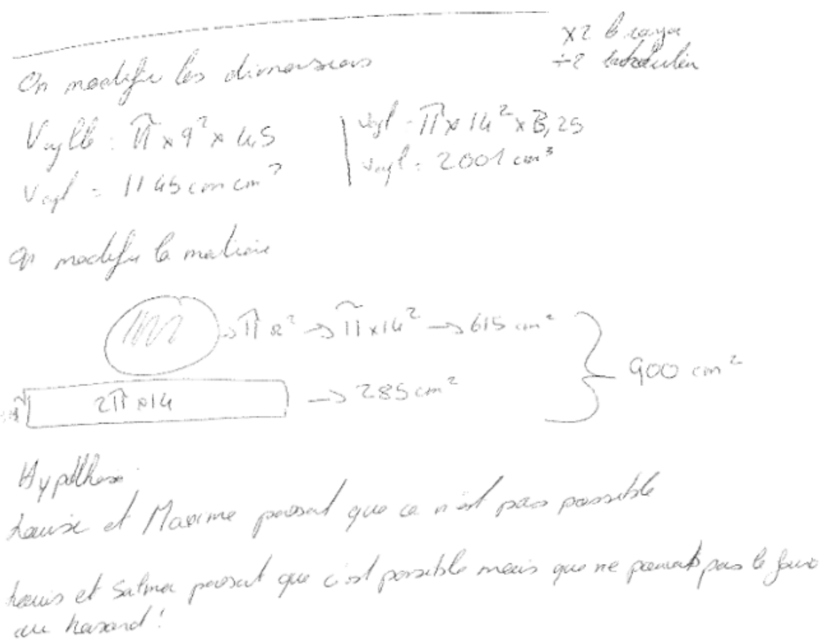
Notons que la valeur 362,85 cm² est erronée car le groupe a oublié d'ajouter l'aire du disque de fond de la casserole. En ajoutant 95,03 cm², on obtiendrait une aire supérieure à celle de la casserole donnée dans l'énoncé.

Groupe 7 :
Le groupe, après le bilan intermédiaire, s'empare de l'exemple et recherche l'aire de la casserole donnée, il trouve environ 438 cm^2.



Production du groupe 7 (début), LS « Casseroles », Eu, 2022

Après des essais de couples de type $(r\ -2, h+2)$ et $(r \times 2, h:2)$, ils concluent sans consensus.

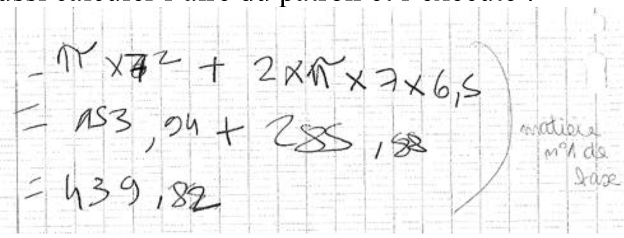


Production du groupe 7 (fin), LS « Casseroles », Eu, 2022

La dernière phrase montre un retour critique de deux élèves du groupe sur leur stratégie. Ils comprennent que prendre des couples (r, h) au hasard est une procédure inefficace pour résoudre le problème.

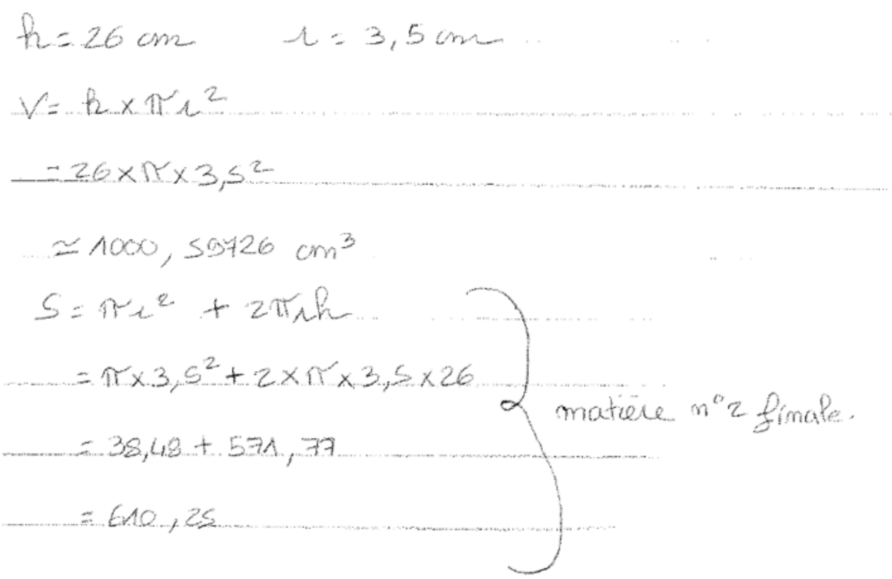
Groupe 8 :
Les quatre élèves du groupe lisent l'énoncé en silence, se l'approprient en annotant la figure de leur énoncé en surlignant les mots clés. Des formules apparaissent (périmètre d'un cercle, aire d'un disque, volume d'une sphère …).

Au début de l’échange entre eux, ils parviennent à calculer le volume de la casserole et notent 1000,35. L’idée de faire « plein de calculs » émerge mais ils se demandent comment choisir r et h.
Un élève pense que, pour le calcul du volume, en échangeant les valeurs de h et r données dans l’énoncé il obtiendrait le même volume. Mais il constate que la condition de 1 L n’est plus remplie. Un autre élève du groupe, malgré le calcul de son camarade, pense toujours qu’échanger ces valeurs ne modifiera ni volume ni l’aire de la surface. Il propose d’augmenter le rayon et de diminuer la hauteur. Après l’intervention de l’enseignante, le groupe prend conscience qu’il faut aussi calculer l’aire du patron et l’exécute :


$= \pi \times 7^2 + 2 \times \pi \times 7 \times 6{,}5$
$= 153{,}94 + 285{,}88$
$= 439{,}82$
matière n°1 de base

Production du groupe 8 (début), LS « Casseroles », Eu, 2022

Ils reviennent ensuite à des calculs de volumes, en essayant, cette fois-ci, de multiplier par 2 la hauteur, et de diviser par 2 le rayon.
Ce qui donne : $\pi \times 13 \times 3{,}5^2 \approx 500{,}3\ cm^3$
Constatant que le volume obtenu est la moitié de celui souhaité, une élève propose de prendre comme hauteur $26\ cm$, soit 4 fois la hauteur initiale et comme rayon $3{,}5\ cm$ (la moitié du rayon initial). L’idée est validée par les autres.
La question de la matière à envisager est alors beaucoup questionnée par le groupe. Ils finissent par se référer aux formules inscrites au tableau de la classe. Avec leur calculatrice, ils font des erreurs de saisie des valeurs, de syntaxe. Leur valeur trouvée de l’aire n’est jamais comparée à celle de la casserole de l’énoncé. Lorsqu’ils veulent exposer leur solution à l’enseignante, ils ne parviennent pas à retrouver « les bons calculs » dans leurs calculatrices. Ils rédigent leur solution :


$h = 26\ cm \quad r = 3{,}5\ cm$
$V = h \times \pi r^2$
$= 26 \times \pi \times 3{,}5^2$
$\simeq 1000{,}59726\ cm^3$
$S = \pi r^2 + 2\pi r h$
$= \pi \times 3{,}5^2 + 2 \times \pi \times 3{,}5 \times 26$
$= 38{,}48 + 571{,}77$
$= 610{,}25$
matière n°2 finale.

Production du groupe 8 (fin), LS « Casseroles », Eu, 2022

Aucun d’entre eux ne se rend compte que l’aire de la surface obtenue est supérieure à celle de la casserole du départ. Ils ne répondent finalement pas à la question posée.

Analyse a posteriori du scénario

Les modifications de la feuille de route par le collectif apparaissent en bleu.

Les **phases 1 et 2** n'ont subi aucune modification *a posteriori*. La phase 1 a été précisée en intégrant le fait que celle-ci n'était pas restreinte à une lecture individuelle mais qu'elle consistait également en une phase d'appropriation de la situation.

En **phase 3**, lors de la visualisation avec GeoGebra l'enseignant ferait apparaitre $r =$ et $h =$

Et un lien serait fait entre 1000 cm^3 et 1 L.

Le tableau prévu pour cette phase ne serait pas donné systématiquement.

Un second couple (r ; h) = (26 ; 3,5) serait introduit (il donne une aire supérieure).

Pour la **phase 4,** a posteriori, elle a été découpée en **trois sous-phases** avec l'introduction d'un temps en classe entière permettant de revenir sur le lien entre le rayon et la hauteur.

Phase 4.1 (15 min) : Travail de recherche en groupe avec interventions de l'enseignant dans les groupes.

Préciser aux élèves que bilan et le brouillon sont récupérés pour observer ce qui a été fait de pertinent.

Individuellement, dans les groupes, l'enseignant pourra donner un rayon et demander de déterminer la hauteur correspondante

Phase 4.2 (5 min) : par une intervention collégiale, le but est de faire réfléchir sur le lien entre r et h.

- L'utilisation du tableau devient pertinente (avec les colonnes : r ; calculer h ; calculer valeur de la surface)
- Dans GeoGebra : faire apparaitre $r =$ et $h =$
- Puis on peut donner un rayon et demander de déterminer la hauteur correspondante

Phase 4.3 (15 minutes) : Retour au travail en groupe

Demander aux élèves de préparer une synthèse de leur recherche.

Pause : 15 minutes

Phase 5 (20 minutes) : Bilan et institutionnalisation

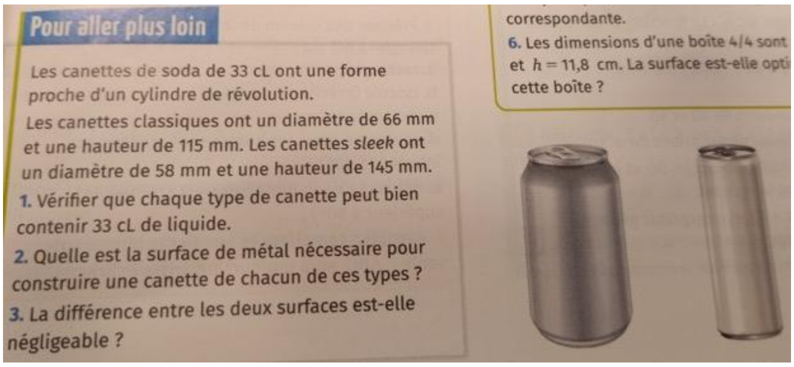
→ revenir sur les productions de groupes en s'appuyant sur les tableaux de valeurs

→ Réponse au problème posé

→ Minimum (GeoGebra)

Distinguer la relation entre r et h du calcul de surface.

Un prolongement a été imaginé après la leçon, portant sur l'exercice du manuel de 2nde Le livre scolaire.fr (p.77) :



Extrait du manuel Maths 2nde, Pour aller plus loin (Le livre scolaire.fr, 2019, p.77)

Un point saillant qui a marqué la séance est la phase de bilan intermédiaire (phase 3) car les groupes d'élèves recevaient alors beaucoup de données. Ils devaient intégrer la distinction entre volume et aire et le fait que l'aire puisse varier à volume constant. Ils devaient également saisir que l'aire est la grandeur à explorer en cherchant à conserver un volume de 1 L.

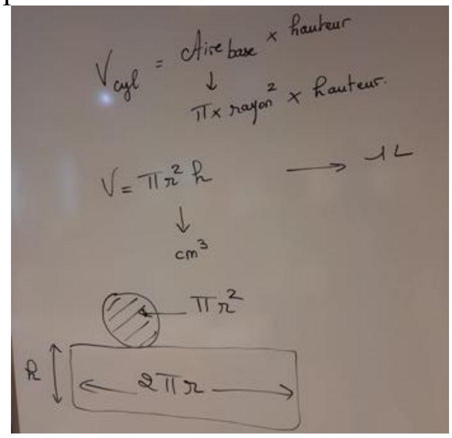


Photo du tableau entre la phase 2 et 3

Le tableau prévu et distribué à discrétion de l'enseignant a été diversement utilisé et complété.

grp 3

La casserole : TABLEAU de valeurs

Faire varier le **rayon**.	Quelle est donc la **hauteur** pour avoir un volume d'1 Litre.	Vérifier que le **volume** est 1 Litre.	Calculer la **surface latérale**.	Calculer la **surface du fond**.	Calculer la **surface totale**.
5	8,5	667,6			
3	10,5	296,88			
9	4,5	~~1000,~~ 1145,11			
8,5	5	1134,90			
7,5	4	76,85			
8	5,5	1105,84			
7,9	5,6	1099,97			
7,8					
7,65	5,85				

Groupe 4

La casserole : TABLEAU de valeurs

Faire varier le **rayon**.	Quelle est donc la **hauteur** pour avoir un volume d'1 Litre.	Vérifier que le **volume** est 1 Litre.	Calculer la **surface latérale**.	Calculer la **surface du fond**.	Calculer la **surface totale**.
7	6,5	1L	≃ 286	≃ 154	≃ 440
7,1082	6,3	1L	≃ 159	≃ 281	≃ 440

Diversité d'exploitation du tableau de valeurs (groupes 3 et 4)

On distingue au-delà du nombre de couples saisis dans le tableau, des colonnes qui restent vides concernant les aires dans le groupe 3 et des aires totales fixes dans le groupe 4.

Grille d'Interventions possibles de l'enseignant

Phases	**Déclencheur d'intervention**	**Interventions**	**Effets attendus, buts**
2		Peux-tu exprimer la hauteur en fonction du rayon ?	h= 1000/(pi*r²) ou h = 1/(pi*r²)
2	Problème de formules	Regarde dans ton livre de maths	
2	Groupe « sec »	Est-ce que tu me dire ce que c'est comme forme d'objet ?	Faire apparaître qu'on a un cylindre
2	Cylindre perçu mais sans aller plus loin	Que sait-on sur ce cylindre et que cherche-t-on ? Quelles sont ses caractéristiques ?	Partie latérale et fond
2	Volume sans aller plus loin	Êtes-vous sûrs qu'on ne connaît pas déjà le volume ? Que peut-on chercher d'autre (que le volume) ? Qu'est-ce qu'on entend par quantité de matière ?	Comprendre qu'il faut calculer l'aire d'une surface
2	Masse	L'épaisseur est la même partout donc on s'autorise à ne pas en tenir compte. On ne va pas s'occuper de la masse mais uniquement de la surface.	Passer directement à la surface
4	Pb d'application d'une formule	Peux-tu me redonner la formule qu'on a vu tout à l'heure ? (Tableau) A quoi correspond r ? h ? pi ? Quelle opération est faite ?	
2/4	Oublis/difficultés de conversions	1L=1000cm³	

	Volume de varie pas donc la surface non plus	Trouve une autre casserole de volume 1L et calcule la surface. ou Si $r = 5$, trouve h pour que le volume soit égal à 1L. Calcule la surface.	
	Pourquoi ne trouve-t ’on pas 1L ? Que fait-on des valeurs approchées ?	Quelle est l’unité du résultat trouvé ? As-tu pensé à utiliser des dm^3 ? On accepte une approximation.	
4	Recherches par essais successifs non organisés sans lien avec rayon et hauteur	Donner au groupe (s’il en éprouve le besoin) un tableau de valeurs : Colonne 1 : faire varier le rayon Colonne 2 : hauteur obtenue à partir du rayon Colonne 3 : volume cylindre ~~Colonne 4 : test (=1?)~~ Colonne 5 : surface latérale Colonne 6 : surface du fond de la casserole Colonne 7 : surface totale On peut donner un rayon et demander de déterminer la hauteur correspondante	Organiser les calculs
4	Recherches par essais successifs non organisés avec lien avec rayon et hauteur	Donner au groupe (s’il en éprouve le besoin) un tableau de valeurs : Colonne 1 : faire varier le rayon Colonne 2 : hauteur obtenue à partir du rayon Colonne 3 : surface latérale Colonne 4 : surface du fond de la casserole Colonne 5 : surface totale	Organiser les calculs
4	Représentation graphique effectuée sur la calculatrice ou version papier	Que représente cette courbe ? Qu’est-ce que cela donne ? Montre à quel endroit on trouve la réponse	Trace écrite

4	Un groupe a trouvé (et sait expliquer la réponse) un couple $(r\ ;\ h)$ qui permet de répondre au problème	S'intéresser à la recherche d'un minima de surface : comment choisir r et h pour obtenir la plus petite surface ?	Faire chercher le minimum
4	Un groupe a trouvé $r = h$	Trouve l'expression de la surface en fonction de r ou h.	Les faire continuer à chercher.

5. Le mot de l'équipe de formation-recherche

Voici un retour sur les questions soulevées par « Les Casseroles » lors des deux Lesson Studies.

Questions soulevées par « Les casseroles »

Quel énoncé ? Quelle dévolution ?

Modélisation : quelle part laisser aux élèves ?

Difficile identification du jeu entre grandeurs aire/volume : quelle place de la manipulation ?

Connaissances majeures (à travailler) ou mineures (anciennes) selon qu'on enseigne en CLG ou LYC

Quelle anticipation de la phase de bilan et institutionnalisation ?

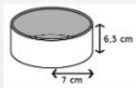
Extrait du diaporama (J3), LS « Casseroles », Irem de Rouen, 2019

Quel énoncé pour quelle dévolution ?

Si une indication de type 1 L=1000 cm^3 est précisée dans l'énoncé, cette conversion n'est plus dévolue à l'élève.
Un énoncé de type celui ci-après prend en charge une partie de la modélisation en présentant un cylindre à la place d'une photo de casserole.

Une entreprise doit fabriquer un grand nombre de casseroles ayant un volume de 1 L.

Le modèle ci-contre est envisagé.



L'un des employés prétend qu'en modifiant les dimensions, il est possible de conserver le volume de 1 L en utilisant moins de matière.

As-t-il raison ?

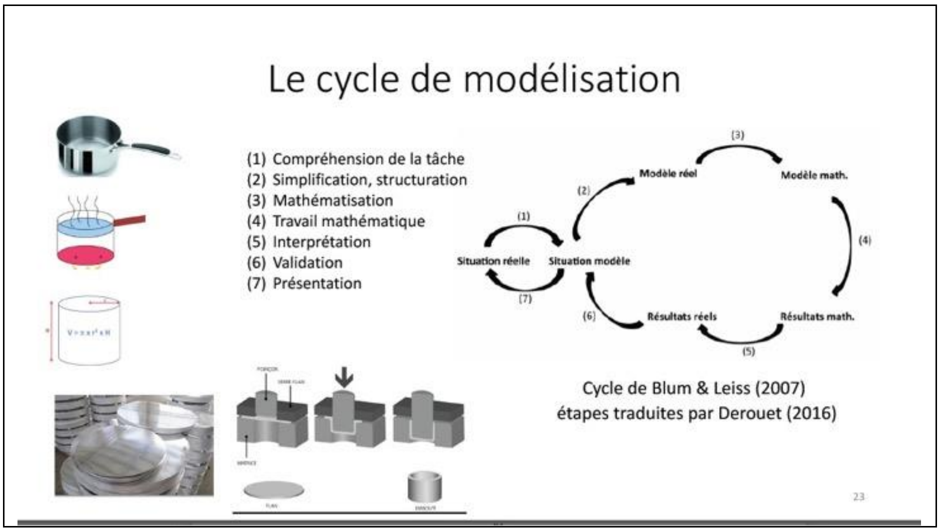
Énoncé avec une part de modélisation déjà réalisée.

Quelle anticipation de la phase de bilan et institutionnalisation ?

La première *Lesson Study* relatée a permis d'améliorer la structuration de la phase de bilan finale (pp.16-19) comme elle peut être anticipée dans des Lesson Studies au Japon. C'est une phase délicate d'autant plus que dans le contexte du dispositif de formation français, elle est réalisée dans la foulée des phases précédentes. Cette phase, appelée neriage au Japon, est à anticiper *a priori* par le collectif et peut l'être grâce aux analyses de procédures et difficultés potentielles. Dans le cadre d'un enseignement hors du contexte de formation, cette phase peut être différée à la séance suivante, le temps que l'enseignant puisse analyser, trier, hiérarchiser les productions ou des extraits mis en adéquation avec les objectifs qu'il s'est fixé.

La question de la modélisation

Le diaporama proposé lors de la troisième journée de formation (en 2018-2019) complète l'étude précédente en traitant des étapes de modélisations visualisées par le cycle de Blum & Leiss (2007).

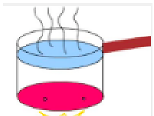


Extrait du diaporama d'apports didactiques, LS « Casseroles », 2018-2019.

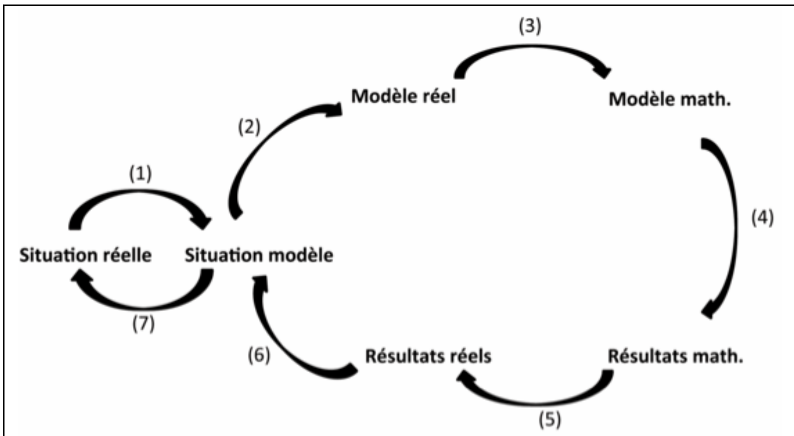
Deux espaces sont en jeu :

- l'espace sensible (le monde réel) constitué des objets concrets (objets usuels ou non, …) : ici la casserole. Une photo comme ci-après constitue un modèle de cet objet avec un manche.

- l'espace géométrique : constitué d'objets idéaux qui peuvent être représentés par des figures : ici un cylindre de révolution.



Plus précisément le cycle de modélisation de Blum & Leiss (2007) possède sept étapes.



(1) Compréhension de la tâche
(2) Simplification, structuration
(3) Mathématisation
(4) Travail mathématique
(5) Interprétation
(6) Validation
(7) Présentation

Cycle de Blum & Leiss (2007), étapes traduites par Derouet (2016)

Quelques étapes du cycle sont détaillées afin d'éclairer le lecteur sur cet outil théorique de didactique. Nous faisons le choix d'extraire des productions d'élèves pour illustrer nos propos.

Vers une situation modèle – Étape 1

La fabrication de casseroles est réalisée par emboutissage de disques de métal comme présenté ci-dessous.

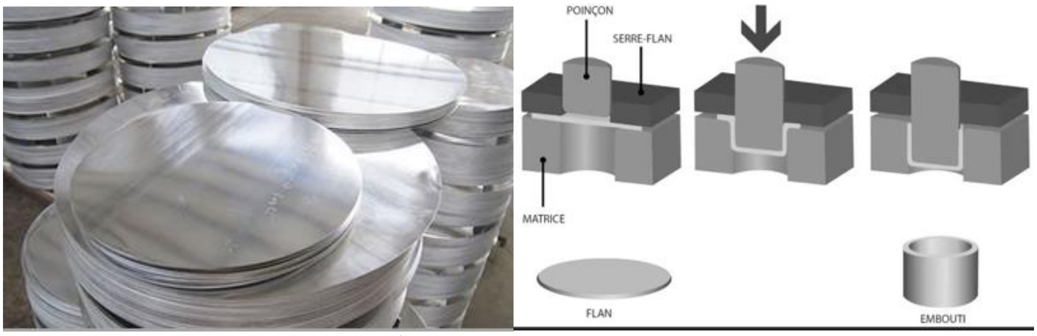
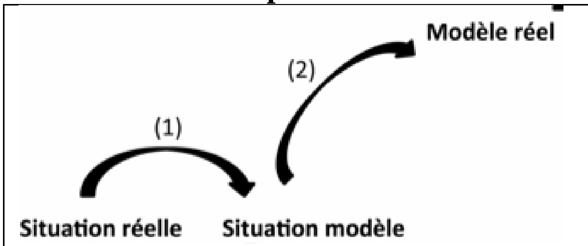
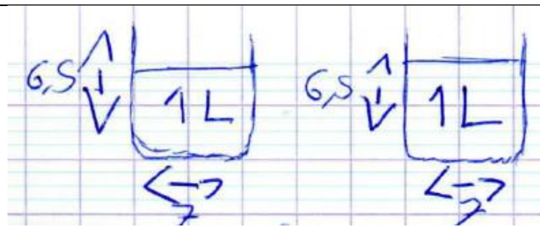


Photo et principe d'emboutissage[1]*, extrait diaporama LS « Casseroles », Eu, 2021-2022*

La situation réelle est la fabrication par un industriel de casseroles qui lui permette d'optimiser le métal utilisé. Bien sûr, la technique d'emboutissage soulève des questions liées à cette technique de fabrication telle que « *L'épaisseur de métal est-elle constante ?* ». Notre énoncé peut déjà être considéré comme proposant une situation modèle en imaginant des casseroles de volume fixe de 1 L.

Considérons les étapes 1 et 2.



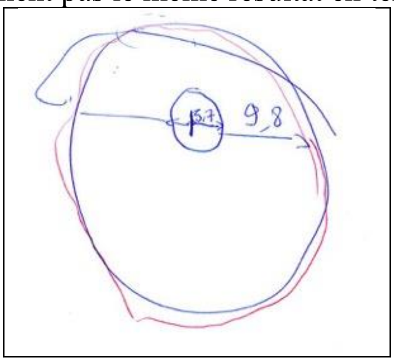


Production d'élève

Étape 1 : On se place dans le cas de casseroles de volume 1 L.
Étape 2 :

- On considère un modèle (cylindrique ou autre).

Soit dit en passant, d'autre modèles peuvent émerger dans les classes, comme celui de deux disques concentriques et ne donnent pas le même résultat en termes d'optimisation (annexe 2).

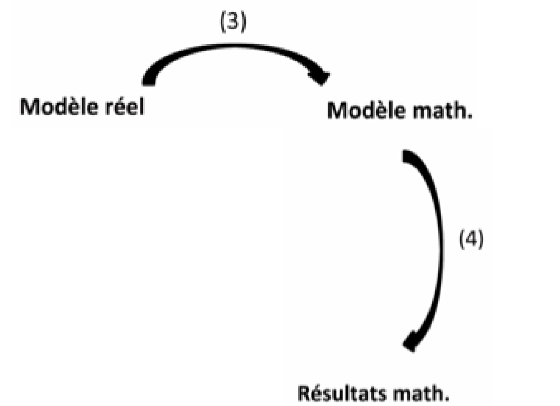


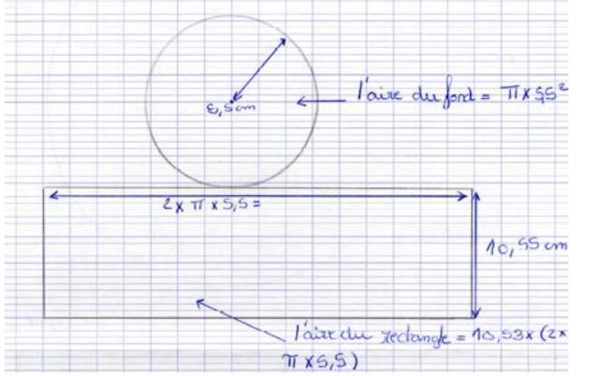
Production d'élève (groupe 6), LS « Casseroles », Sotteville, 2018-2019.

- On donne des dimensions à ce cylindre (si modèle retenu).
- On considère que la quantité de matière est assimilée à l'aire car :
  - on considère que la matière est uniformément répartie ;
  - on simplifie ou on néglige certains aspects de l'épaisseur.

[1] Source : http://www.acheter-vendre-machines.fr/2013/06/lemboutissage-procede-et-utilisation.html

Considérons les étapes 3 et 4.

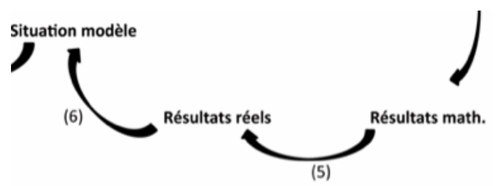


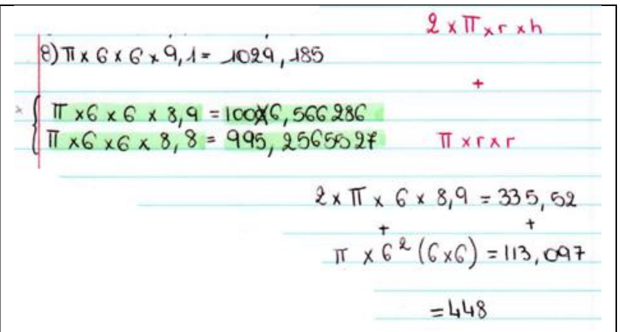


Production d'élève

Étape 3 : On passe d'une casserole cylindrique avec des dimensions à un cylindre au sens des mathématiques, idéal (double rôle du cylindre).
Étape 4 : Le cylindre, comme objet mathématique idéal, possède un patron que l'on peut utiliser pour déterminer des aires.

Considérons les étapes 5 et 6.





Production d'élève

Les étapes 5 et 6 peuvent être imaginées ainsi (même si elles ne sont pas clairement illustrées**).**
Étape 5 : On a obtenu une casserole cylindrique de volume environ 1 L et d'aire environ 448 cm^2.
Étape 6 :
La casserole obtenue est conforme en termes de volume.
La casserole obtenue est non conforme car elle utilise plus de métal que celle de l'énoncé. À partir de l'examen de ces résultats obtenus, les élèves peuvent directement revenir à un nouveau traitement mathématique en restant dans le même modèle (étape 4), le cycle de modélisation n'étant alors pas parcouru de manière linéaire.

Jeu entre les grandeurs aire/volume : quelle place de la manipulation ?

Les Lesson Studies ont mis en évidence une difficulté majeure d'identification et de distinction des grandeurs « aire » et « volume » en jeu.
Dans l'énoncé proposé, les grandeurs ne sont pas explicitées, elles ne sont présentent que par les mentions de « 1 L » et « quantité de matière ».
Un obstacle épistémologique réside également dans une résistance des élèves à envisager qu'à volume fixé, l'aire peut varier.

Plus généralement, il semble exister une croyance bien ancrée de type : quand une grandeur sur une figure géométrique est fixe, les autres grandeurs qu'on peut considérer le sont aussi. Il nous

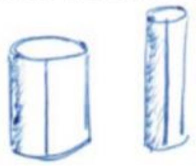
semble important de déconstruire cette croyance dès le collège en organisant un travail autour de situations de type optimisation du périmètre d'un rectangle à aire fixe (ou le contraire). Une intervention possible, pour la situation « Casseroles » est de prévoir un autre couple de valeurs donnant un même volume avec une aire distincte.
Repérant cet obstacle, un enseignant du collectif de Eu a suggéré en particulier de travailler à tout autre moment de l'année des tâches similaires telles que :

Trouver les dimensions de différents rectangles d'aire donnée.
Trouver les dimensions de différents pavés droits de volume 1/2L.

Ce point nous semble à travailler au-delà du temps entourant la situation « Casseroles » et plus largement tout au long du cursus mathématique de l'élève comme préconisé dans le document Éduscol « Grandeurs et mesures au cycle 3 », avec une situation reliant aire et périmètre autour de rectangles[2]. Le lecteur y trouvera des pistes d'institutionnalisation comme « *Deux rectangles peuvent avoir un même périmètre sans avoir la même aire*. »

Comparer les volumes des deux cylindres fabriqués à partir d'une feuille A4 travaille un obstacle du même ordre : il illustre la variation d'un volume à aire latérale fixée.

On souhaite obtenir deux cylindres à l'aide d'une feuille de format A4 (21 cm x 29,7 cm).
Comparer les volumes des deux cylindres et calculer leur rapport.



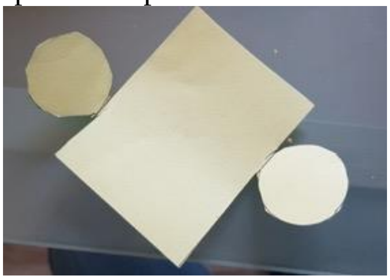
Une situation proposée en cycle 4 liant aire et volume d'un même objet

Un blocage peut également provenir de la longueur du rectangle latéral dont certains élèves ne repèrent pas la dépendance au rayon de la base. Faire réaliser un patron de cylindre peut permettre cette prise de conscience (grâce à un patron erroné) et peut s'avérer nécessaire même au lycée.
La bouteille introduite dans la Lesson Study de Sotteville Lès Rouen tente de relier ces grandeurs à partir d'un objet du quotidien prédécoupé et reconstitué par l'enseignant.

Manipulation par l'enseignant d'une bouteille d'eau superposée sur le patron du tableau, LS Sotteville, 2018-2019

2 https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Grandeurs_et_mesures/53/6/RA16_C3_MATH_grand_mesur_perimetre_aires_635536.pdf

Une alternative serait la confection de patron de cylindre.
Faire construire un premier patron permettrait de se confronter au lien entre le rayon du fond de casserole et une dimension de sa face latérale qui n'a rien d'évident. Un patron de cylindre à réajuster questionnera le lien entre ces deux dimensions lors de sa manipulation une fois découpé, comme sur la photo ci-après.



Exemple de patron dont la manipulation invalide les dimensions initiales

Faire construire des patrons de plusieurs casseroles, les comparer au sein de la classe, permettrait de prendre conscience des grandeurs à considérer et des liens entre elles, ce qui semble avoir manqué dans le scénario de la Lesson Study à Eu où les formules ont été délivrées rapidement aux élèves.

La situation met en jeu deux grandeurs qui dépendent a priori de deux variables (r et h). Comme le volume est fixé avec la contrainte de 1 L, l'aire latérale s'exprime avec une seule variable (r ou h). Son expression à l'aide de r facilite les calculs et la résolution. Mais nous pourrions envisager d'exprimer l'aire en fonction de r et du volume V ou bien de travailler sans privilégier une variable (voir ci-dessous).

Enfin la manipulation de différentes grandeurs est facilitée par la présence des unités, y compris dans les calculs comme préconisé dans le document ressource Maths et quotidien (MENSCOL, 2016).

La calculatrice et les fonctions de plusieurs variables

Nous avons repéré à deux reprises des tentatives d'entrer dans la calculatrice l'expression de l'aire en fonction de x (r) et de h (groupe 3, Lesson Study, Sotteville-Lès-Rouen). La calculatrice bloque alors l'avancée du travail, n'offrant que la possibilité d'entrer une fonction d'une variable x. Elle constitue alors une opportunité d'intervention de l'enseignant pour suggérer d'exprimer une variable en fonction de la seconde.

Travailler la covariation sans privilégier la formulation d'une variable en fonction d'une autre

Le travail avec les variables, après modélisation, aboutit à la condition $\pi r^2 h = V$ et à l'étude de la fonction de deux variables S= $2\pi rh + \pi r^2$. L'étude de l'optimisation d'une telle fonction sous contrainte est complexe pour le niveau du lycée. Toutefois, la compréhension du problème est accessible (comme l'atteste des productions d'élèves).
Il est alors envisageable de travailler sans privilégier une des deux variables. On peut par exemple simplifier l'expression de S à partir de la contrainte et obtenir : S=2V/*r*+V/*h* (un tel travail a été produit par un enseignant de la LS-Eu). Cela permet déjà de comprendre que *r* et *h* ne peuvent pas être trop petits, et donc pas trop grand par la contrainte, car cela donne de grandes valeurs de S (alors qu'on veut minimiser ou abaisser la valeur de S).
Une autre relation peut être intéressante à remarquer (et que remarque certains élèves avec un 2*r* et *h*/4) : si on augmente r d'un facteur *k*, il faut réduire h d'un facteur k^2. Donc, si on a un

couple (r_0 ; h_0) qui satisfait la contrainte de volume, alors il en est de même du couple (kr_0 ; h_0/k^2) – on les a d'ailleurs tous les couples satisfaisant la contrainte. Finalement, on a à étudier la fonction $S(k)= 2V/(kr_0)+Vk^2/h_0$.
S(1) est la valeur de l'aire pour le couple (r_0 ; h_0) et que l'on cherche à minimiser. Or, si S'(1) n'est pas nul, alors on peut trouver une valeur de k proche de 1 qui rend $S(k)<S(1)$. Donc, la condition nécessaire pour l'optimum est S'(1)=0, soit $-2V/r_0+2V/h_0$), c'est-à-dire $r_0=h_0$. Il faudrait ensuite justifier que l'on a bien un minimum avec le signe de S' pour ce couple. Cette approche est délicate, car on considère le couple (r_0 ; h_0) non pas comme un couple qui répond à la contrainte (c'est présenté ainsi dans l'énoncé) mais comme une inconnue.
Par une étude plus usuelle, on peut calculer S' et étudier son signe : $S'(k)=2V/(h_0k^2) \times (k^3–h_0/r_0)$. Le minimum est donc obtenu pour $k=(h_0/r_0)^{1/3}$, ce qui donne le couple minimum $r_{min}=h_{min}=r_0^{2/3}h_0^{1/3}$.

6. Conclusion

En conclusion, l'exemple ci-dessus vient illustrer toute la problématique soulevée par les deux Lesson Studies autour de cette situation où l'enseignant est amené à faire des choix, à trouver un équilibre entre un travail autour des grandeurs et mesures et autour des fonctions, voire d'articuler différents temps autour de cette situation.
De plus, certaines connaissances apparaissent majeures à viser au cycle 4 mais sont un frein en seconde sur cette situation comme les conversions. Il est apparu nécessaire de débloquer les élèves de seconde sur la correspondance entre les litres et le cm^3 afin d'enclencher un travail plus tourné vers le concept de fonction. De plus cette séance a permis d'enrichir l'anticipation de la phase d'institutionnalisation autour de cette situation pour une nouvelle mise en œuvre.
Quelques soient vos impressions à la lecture de ces éléments, nous espérons que ce cahier vous permettra de vous lancer sur cette situation éclairée conjointement par des expériences de classes et des apports de la recherche en didactique.

Remerciements

L'équipe de formation-recherche tient à remercier non seulement les acteurs de terrain investis dans cette Lesson Study (élèves et enseignants impliqués dans la formation), mais aussi les acteurs de l'ombre sans qui ce type de formation n'aurait pas vu le jour, à savoir, particulièrement Nicolas Gendreau de l'Inspection Régionale de Mathématiques de l'Académie de Normandie, ainsi que les équipes de direction administrative du lycée Sembat de Sotteville-Lès-Rouen et du lycée Anguier de Eu. Nous tenons à remercier les membres du LDAR impliqués de près ou de loin dans cette formation pour leur appui scientifique.

Bibliographie

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. In G.-P. B. W. Haines & S. Khan (Eds.), Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics (pp. 222–231). Chichester: Horwood Publishing.

Derouet, C. (2016). La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse. Étude de la conception et de la mise en œuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral, Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

Maths 2nde, (juin 2019) De Sousa P., Éd. Le livre scolaire.fr,
https://fr.calameo.com/read/0005967290f026f1d6ada

MENSESR, (mars 2016), Document ressources transversales « mathématiques et quotidien », Éduscol.
https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Ressources_transversales/99/8/RA16_C3_C4_MATH_math_et_quotidien_600998.pdf

MENSESR, (mars 2016), Document ressource « grandeurs et mesures au cycle 3 »

Annexes

Annexe 1 Résolution de la situation avec le modèle cylindrique

Le volume de la casserole étant fixé à 1L soit 1 dm3, on obtient

$$Volume=\pi r^2\times h=1 \quad \text{donc on en déduit} \quad h=\frac{1}{\pi r^2}$$

Or on a trouvé que l'aire de la casserole en fonction de r et h était:

$$Aire=\pi\times r^2+2\pi r\times h$$

en utilisant la 1re formule on obtient : $Aire=\pi\times r^2+\frac{2}{r}$

Définissons alors la fonction $f(x)=\pi x^2+\frac{2}{x}$

Cherchons le minimum de $f(x)=\pi x^2+\frac{2}{x}$ sur l'intervalle]0;2].

Résolvons f'(x) =0.

$$f'(x)=2\pi x-\frac{2}{x^2}$$

Résolvons : $2\pi x-\frac{2}{x^2}=0$

$$\frac{2\pi x^3-2}{x^2}=0$$

$$\frac{2\pi}{x^2}\times(x^3-\frac{1}{\pi})=0$$

Rappel $a^3-b^3=(a-b)\times(a^2+ab+b^2)$ et $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\ peut\ s'écrire\ \pi^{-\frac{1}{3}}$

soit $\frac{2\pi}{x^2}\times(x-(\frac{1}{\pi})^{\frac{1}{3}})\times(x^2+x(\frac{1}{\pi})^{\frac{1}{3}}+(\frac{1}{\pi})^{\frac{2}{3}})=0$

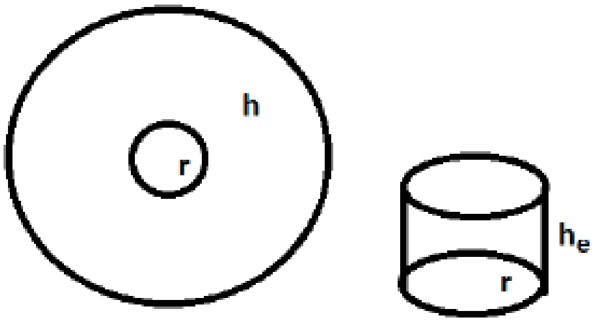
La seule racine est $x=\pi^{-\frac{1}{3}}$ (la 2e parenthèse étant une somme de termes strictement positifs)

---

or $h=\frac{1}{2\pi r^2}=\frac{1}{\pi(\frac{1}{\pi})^{2/3}}=\frac{1^{(1-\frac{2}{3})}}{\pi^{(1-\frac{2}{3})}}=\frac{1^{(\frac{1}{3})}}{\pi^{(\frac{1}{3})}}=(\frac{1}{\pi})^{\frac{1}{3}}=r$

L'unique solution qui minimise l'aire est lorsque r = h = $\pi^{-\frac{1}{3}}$

Annexe 2 Résolution de la situation avec le modèle d'emboutissage



Le volume de la casserole étant fixé à 1L soit 1 dm3, on obtient

$Volume=\pi r^2\times h_e=1$ donc on en déduit $h_e=\frac{1}{\pi r^2}$ (E$_0$)

Or avec le modèle de l'emboutissage, l'aire de la couronne du disque doit être égale à l'aire latérale de la casserole

donc $\pi\times(r+h)^2-\pi\times r^2=2\pi r\times h_e=\frac{2}{r}$ (En utilisant E$_0$)

ce qui revient à résoudre $\pi\times(r+h)^2-\pi\times r^2-\frac{2}{r}=0$

$2\pi rh+\pi h^2-\frac{2}{r}=0$ (E$_1$)

or on sait que ce qui minimise la quantité de matière pour la casserole c'est quand

$h_e=r=(\frac{1}{\pi})^{\frac{1}{3}}=\pi^{-\frac{1}{3}}$ (Cf détermination de la racine)

ce qui revient à résoudre en substituant r dans (E$_1$)

$2\pi\times\pi^{-\frac{2}{3}}h+\pi\times\pi^{-\frac{1}{3}}\times h^2-2=0$, le discriminant est de $\nabla=12\pi^{\frac{2}{3}}$ et

la seule solution positive est

$h=\pi^{-1/3}\times(\sqrt{3}-1) = h_e\times(\sqrt{3}-1)$ (h et h$_e$ sont proportionnels)

Annexe 3 Autre choix d'énoncé retenu en LS sur la situation « Les casseroles »

Les casseroles

Une entreprise doit fabriquer un grand nombre de casseroles ayant un volume de 1 L.

1. Proposer des dimensions possibles pour ces casseroles.
2. Le directeur de l'entreprise voudrait utiliser le moins de métal possible.Trouver alors les dimensions idéales de la casserole en conservant un volume d'1L..

Énoncé du collectif de la LS « Casseroles », Lycée Coubertin, Lillebonne, 2018