Cahier de Lesson Study

Année 2021-2022

« Aire de baignade »

Plage des Marquistas, Annecy (http://www.annecy-ville.fr)

Co-écrit par :
L'équipe de formation-recherche :
Frédéric Hartmann, Blandine Masselin (LDAR)
Le groupe « Activités » de l'IREM de Rouen en appui.

Les **référents mathématiques de circonscription** du parcours Lesson Study du plan mathématique en 2021-2022,
Nathalie Destas, Delphine Dufau, Marine Gérard, Anne Leconte, Frédéric Le Menez, Aurélie Margollé, Éric Minot, Émilie Salazar.

Avec le soutien :
des IA-IPR de Normandie, de la Mission Maths 27, de l'Académie Normandie

Table des matières

1. Introduction

La situation « Aire de baignade »

Présentation de la situation initiale « Aire de baignade » et énoncé

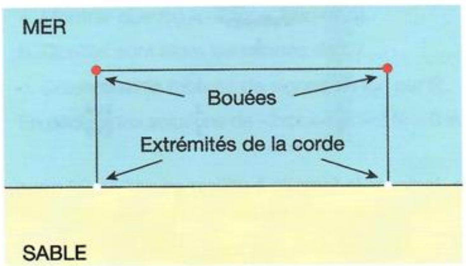
Aire de baignade Les moniteurs d'une colonie de vacances souhaitent amener 120 enfants se baigner tous ensemble dans un lac. Pour délimiter une aire de baignade, ils disposent d'une ligne d'eau de longueur 25m. La loi impose que le nombre de baigneurs ne doit pas dépasser 3 personnes pour 2 m^2. **Pourront-ils respecter la loi ?**

Figure 1: Énoncé « Aire de baignade » proposé en formation LS, année 2021-2022

Description de la situation

La situation s'inscrit dans le cadre de la résolution de problème en CM1-CM2. Elle s'inscrit aussi dans une démarche mettant en relation les mathématique et la vie quotidienne (cette affirmation sera questionnée par le collectif). Elle fait appel aux grandeurs et mesures (en particulier aires et longueurs) et à la proportionnalité.
C'est un problème complexe ; il est « classiquement » posé dans le secondaire sans référence à une législation, et la résolution y fait appel à une fonction dont on cherche les variations. Une procédure experte est accessible en 1ère (spécialité ou technologique) mais, dans ce cas, la forme rectangulaire de la zone de baignade est imposée par l'énoncé. La figure 2 montre une mise en œuvre extraite d'un manuel de mathématiques sous le nom de « problème ouvert ».

Problème ouvert Un maître-nageur utilise une corde et deux bouées pour délimiter une zone de baignade surveillée de forme rectangulaire. Il dispose d'une corde de longueur 185 m.



Comment le maître-nageur doit-il placer les bouées pour obtenir une zone de baignade ayant la plus grande aire possible ?

Figure 2 : Extrait manuel TechMaths 1 STI2D, Nathan, 2019 pp.75-76

Le guide « La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen » (MENJS, 2022b, p.34) fait apparaître une variante de cette situation où les élèves sont amenés à chercher des dimensions possibles d'un rectangle dont l'aire est fixée. Dans ce cas, si le problème reste ouvert, la dimension « Vie quotidienne » a entièrement disparu avec tous ses aspects liés à la modélisation.

Au cours moyen, on peut, par exemple, proposer le problème suivant :

> « *Un rectangle a ses côtés qui ont pour longueur des nombres entiers de centimètres. Son aire est de 100 cm². Trouve toutes les dimensions possibles pour ce rectangle.* »

Figure 3: Extrait p.34 du Guide de résolution de problème au CM

Ce qui distingue, entre-autres, la situation proposée au collectif d'enseignants de la situation « classique » ou de celle du guide ci-dessus, c'est bien sa dimension de modélisation. En effet, rien n'indique dans l'énoncé une forme particulière et les élèves seront amenés à imaginer plusieurs formes possibles, avec plusieurs réponses selon les formes imaginées.
Selon les hypothèses de modélisation et de choix de forme de la zone de baignade, le problème admet des solutions différentes. Avec une forme rectangulaire, on ne peut pas respecter la loi si tous les enfants se baignent simultanément, alors qu'avec un demi-disque, c'est possible.
En annexe 1, le lecteur trouvera une solution commentée au problème de l'aire de baignade.

BO et Compétences au cycle 3

Au cycle 3, les élèves rencontrent leurs premières formules pour calculer les mesures de diverses grandeurs :
• des longueurs : périmètre du carré, périmètre du rectangle, longueur du cercle ;
• des aires : aire du rectangle, du carré, du disque.

Attendus de fin de cycle 3 :
- Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur (périmètre), aire
- Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs.
- Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux, notamment des problèmes de proportionnalité (identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs à partir du sens de la situation, résoudre un problème de proportionnalité impliquant des grandeurs).

Au cycle 2
La situation peut également s'envisager au cycle 2. Nous précisons des éléments du programme que la situation permet de travailler.
Si la notion d'aire n'est pas au programme du Cycle 2, la situation pourrait s'inscrire dans un travail à prise d'initiatives autour de la résolution de problème impliquant du dénombrement comme celui mis en œuvre dans une classe de CP et relaté en annexe 4, bien sûr avec des adaptations.

Compétences mathématiques visées dans la réalisation de cette situation.
Les six compétences du BOEN n°31 du 30 juillet 2020, à savoir chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer et communiquer sont en jeu dans la résolution de cette situation. L'une d'entre elles, modéliser sera un des enjeux majeurs de développement du travail mathématique. Pour cela, nous la reprécisons ci-dessous telle qu'elle est définie de façon institutionnelle en ne retenant que les éléments en rapport avec la situation :

<u>Extraits du BOEN n°31 du 30 juillet 2020</u>

Modéliser
- Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne.
- Reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations de proportionnalité.
- Reconnaître des situations réelles pouvant être modélisées par des relations géométriques.
- Utiliser des propriétés géométriques pour reconnaître des objets.

2. Analyse a priori

L'analyse *a priori* de la situation « aire de baignade » s'effectue en amont de la construction d'un scénario pour une classe d'un niveau fixé par un collectif d'enseignant. Elle permet un diaporama assez large de la situation et s'appuie sur une grille d'amorce d'analyse *a priori* fournie par les formateurs (appelés aussi facilitateurs). Les rubriques de cette grille d'amorce sont apportées par les facilitateurs ; il s'agit *des connaissances mathématiques en jeu*, *de la dimension vie quotidienne* (aspects de modélisation), *de la place dans la(les) progression(s), de la dimension TICE et/ou matériel, des procédures possibles des élèves, des difficultés et erreurs possibles*.

Grille d'amorce d'analyse *a priori*

Voici la grille d'amorce réalisée par un collectif de Référents Mathématiques de Circonscription du plan math (parcours LS) en 2021-2022.

Connaissances mises en jeu

Les enseignants préparant la Lesson Study ont dégagé des objectifs et des éléments d'analyse *a priori* de la situation initiale « Aire de baignade ».

Connaissances mathématiques en jeu	Formules de périmètre, aire d'une figure plane (carré, rectangle) pas le disque Sens de périmètre et aire, distinguer les deux Résolution de problème avec fractions simples, décimaux et calculs Proportionnalité Algorithmes de la multiplication et de l'addition Géométrie : propriétés des figures, le carré, le rectangle (côtés opposés de même longueur)
Dimension vie quotidienne (aspect modélisation)	Longueur à la piscine ; ligne d'eau de la piscine Accès à un lac C'est un problème de sécurité plus proche de l'adulte que de l'élève L'aire de la zone de baignade n'est pas une préoccupation d'enfant
Place dans la (les) progression(s)	Après l'étude des propriétés et formules de périmètre, mi CM2, fin CM2 ? Après l'étude des situations de proportionnalité
Dimension TICE et/ou matérielle	La calculatrice peut être un appui selon la méthode de résolution Place des décimaux : 6 puis 7 puis décimaux peut-être 6,2, …. Idée d'un max Tâtonnement plus important avec calculatrice GeoGebra utilisation par le maître (calcul d'aire d'une figure) calcul de périmètre Fichier contenant la formule $x(25-2x)$ manipulable par le maître Mémo des formules pour les aires Cordelette de 25 cm Mosaïques, petits carrés Feuilles quadrillées (1cm) avec ou sans la cordelette Place du matériel : À disposition, imposé ou apporté en fonction des procédures ponctuellement
Démarches possibles des élèves	Entrée par la proportionnalité avec l'obtention préalable des 80m^2 minimaux suivi de tâtonnements pour obtenir l'aire de toute zone baignade Entrée par représentation géométrique de l'aire de baignade, calcul de l'aire et finalement du nombre d'élèves possible. Comparaison avec 120.
Difficultés et erreurs possibles	Confusion avec la ligne d'eau de la piscine (polysémie du terme) Confusion aire et périmètre/longueur Difficulté due à l'unité : cm/cm^2 Il n'est pas évident que l'aire varie à périmètre fixé

Figure 4: Grille d'amorce d'analyse a priori, St Ouen-de-Thouberville,25 novembre 2021

3. Déroulement de la lesson study

Énoncé

Voici l'énoncé fixé par le collectif d'enseignants :

Zone de baignade
Les moniteurs d'une colonie de vacances souhaitent amener 120 enfants se baigner tous ensemble dans un lac. Pour délimiter une zone de baignade, ils disposent d'une ligne d'eau de longueur $25m$. Il est interdit de dépasser 3 personnes pour $2m^2$. **Pourront-ils respecter la loi ?**

Figure 5: Énoncé retenu par les RMC, LS « Aire de baignade », 2021-2022

Plusieurs aménagements de l'énoncé donné aux élèves par rapport à l'énoncé initial ont été envisagés à commencer par la disparition de l'expression « aire de baignade » au profit de « zone de baignade » Le terme « aire » est enlevée car le collectif pense que les élèves vont trop rapidement imaginer devoir faire appel à une formule, le terme « zone » étant plus neutre et non associé directement aux mathématiques.
La formulation *« La loi impose que le nombre de baigneurs ne doit pas dépasser* 3 *personnes pour* $2m^2$. » a été transformée en *« Il est interdit de dépasser 3 personnes pour* $2m^2$. » pour des élèves de Cycle 3. Ce nouveau choix a été motivé par une recherche de simplification syntaxique. La référence au mot « loi » semble *a priori* plus abstraite et la nouvelle formulation, plus courte, paraît plus directe.
Le collectif s'est ensuite mis d'accord sur des objectifs de séance et un scénario qui permette de les atteindre. Du matériel a été prévu de façon à laisser aux élèves la possibilité d'expérimenter physiquement de façon à s'approprier la situation.

Objectifs de la séance

- Différencier les grandeurs aire et longueur
- Faire travailler ces concepts et associer une dimension avec son unité (unités m et m^2) en situation ;
- Résoudre un problème avec démarche d'investigation.

Matériel

- Feuille de plastique souple de type rhodoïd de longueur 25 cm pour délimiter une zone circulaire
- Feuilles quadrillées 1cm de côté
- Ciseaux
- Calculatrice
- Formulaire si besoin (affichage dans la classe ou à disposition pour chaque élève)

Mode opératoire

- Travail en groupes de 4 ou 5 élèves (groupes hétérogènes).
- Usage de la calculatrice : oui / non

Scénario prévu

Phase 0 : (10 min) Introduction du problème

- Dire ce qu'il va se passer
- Distribution et lecture individuelle de l'énoncé, puis lecture collective

P : « On va chercher à résoudre un problème, on a un défi mathématique, je vous distribue l'énoncé, qui veut le lire ? »

Phase 1 : (5 min) Recherche individuelle

Consigne donnée, feuille de brouillon blanche

P : « Vous allez chercher seul le problème pour pouvoir ensuite échanger en groupe. Ne pas effacer ce que vous faites »

L'enseignant-expérimentateur n'intervient pas.

Phase 2 : (25 min) Recherche en groupe

P « Maintenant, vous allez pouvoir échanger entre vous sur ce que vous avez trouvé. Si besoin, vous pouvez lever la main/ je vais passer de groupe en groupe régulièrement. Il y a du matériel si vous voulez. »

Pause du travail de groupe

Trois possibilités sont envisagées pour le matériel (sans être tranchées) :

- P montre le matériel à toute la classe,
- Tout le matériel est déjà sur chaque table
- Une table de matériel (corde, …) est située dans un coin de la classe

Pause des élèves (récréation)

Scan des productions des groupes

Phase 3 de bilan et institutionnalisation : (20 min)

Avec un vidéoprojecteur, montrer des procédures de groupes avec présentation orale par un représentant du groupe à la classe.

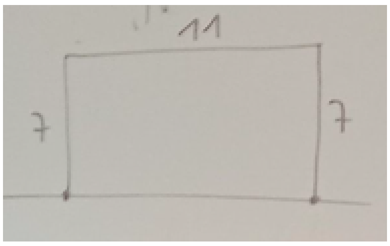
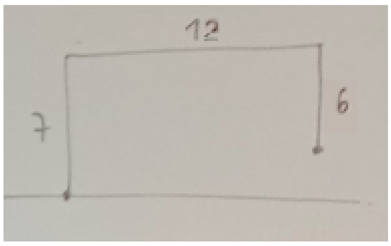
Ensuite, l'enseignant procédera par étape au tableau comme indiqué ensuite :

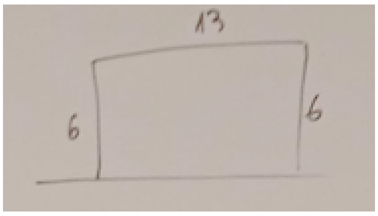
Étape 1 : Les différentes zones de baignade

P dira « Quelle forme avez-vous choisi comme zone de baignade ? »

P schématisera les zones

Des rectangles

<table>
<tr>
<td>Un rectangle 7 m ; 11 m ; 7 m

7 m + 11 m + 7 m = 25 m
Calcul d'aire : 77 m² (ou annoncé 77 carreaux)</td>
<td>Un rectangle avec une ouverture d'un mètre sur une largeur 7 m ; 12 m ; 6 m

7 m + 12 m + 6 m = 25 m
Calcul d'aire : 84 m² (ou annoncé 84 carreaux)</td>
</tr>
</table>

Un rectangle 6 m ; 13 m ; 6 m	*Un carré*
 *6 m + 13 m + 6 m = 25 m* *Calcul d'aire : 78 m^2 (ou annoncé 78 carreaux)*	*Représentation d'un carré de 8,3 m de côté* *8,3 m + 8,3 m + 8,3 m = 24,9 m* *L'aire vaut un peu plus de 64 m^2*

Même si des élèves l'ont utilisé, les RMC décident que le demi-disque ne sera pas évoqué dans le bilan *a priori.*

Étape 2 : P interrogera un groupe qui a obtenu 80 m^2 (en imaginant que le 80 m^2 émergera) P écrira au tableau : *Il faut au moins 80 m^2*.

Étape 3 :
Conclusion : Pour résoudre ce problème, on a choisi différentes formes de zones de baignade. Avec les rectangles on n'a pas réussi à atteindre 80 m^2.

Le tableau partagé en plusieurs zones pourra prendre la forme suivante à la fin.

Zones proposées	Rectangle 3 Dessin + longueur + aire	**Aire minimale**
Rectangle 1 Dessin + longueur + aire		Il faut une zone de plus de 80m^2 Calculs
	Le carré Dessin + longueur + aire	**Conclusion**
Rectangle 2 Dessin + longueur + aire	Le demi-cercle Dessin + longueur + aire	- On a choisi différentes formes. - Avec des rectangles nous n'avons pas réussi à atteindre 80 m^2. Nous ne savons pas si c'est possible. - *Avec un demi-cercle, c'est possible.*

Remarques des facilitateurs :
– Les aires sont inscrites sans calcul (les formules ne font pas partie des objectifs visés).
– Des rectangles vont sûrement être proposés. L'enseignant adaptera le bilan en fonction de ce qui a été fait.
– Le demi-cercle peut ne pas être proposé par les élèves, dans ce cas, adapter la conclusion.
– Le collectif d'enseignants n'a pas souhaité détailler comment obtenir 80 m^2 et n'indique pas ce qui se passerait si personne n'a trouvé 80 m^2.

Analyse *a posteriori* du déroulement effectif

Débriefing à chaud

L'enseignante-expérimentatrice ainsi que le collectif ont relevé comme point saillant de la séance des confusions entre longueur et aire, en particulier un mélange entre les unités mètre et mètre carré. La plupart des élèves se sont également précipités individuellement sur des opérations en tout genre, faisant des calculs mêlant des données de l’énoncé.

Travaux de différents groupes d’élèves

Voici un panorama des productions de l’ensemble des travaux des élèves.

Groupe 2 :

Le groupe est constitué de deux filles, L (CM1) et C (CM2), et de deux garçons de CM2, M et H. Pendant la phase de recherche individuelle, les 4 élèves surlignent les données numériques dans leur énoncé. Les trois CM2 produisent des calculs puis deux d’entre eux , H et C, échangent sur le calcul suivant produit par C.

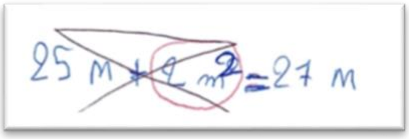


Figure 6 : Extrait brouillon, élève C

L’élève H indique à C qu’on ne peut pas additionner des m et m^2 ce qui entraine C à barrer son calcul initial.
L’élève M, lui, écrit des divisions sans aboutir. Par la suite, il parvient à trouver 80 et répond « non » à la question posée du respect de la loi en comparant $80m > 25m$ de corde).
L’élève M, en fin de séance, à verbaliser son raisonnement à l’observateur et lui a expliqué à quoi correspondaient ses résultats obtenus.

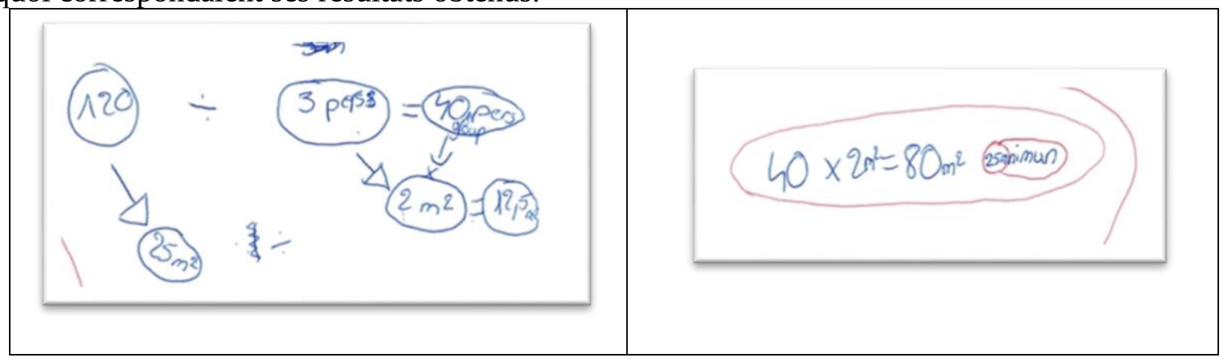


Figure 7 : Phase de calculs autour de la proportionnalité

Il indique qu’il y a 40 groupes de 3 personnes. Comme chaque groupe occupe $2m^2$, il obtient que $80m^2$ sont nécessaires (partie droite, fig.7).

L’élève H est le seul du groupe qui représente une zone de baignade sous forme patatoïde mais qui ne l’engage pas vers un calcul ou une estimation de son aire. Sa représentation montre qu’il distingue les deux grandeurs longueur (flèche pointant la ligne d’eau de 25m) et aire ($2m^2$ flèche pointant vers une zone, voir fig.8).

À l’issue de la mise en commun collective, l’élève H précise qu’il n’a pas compris que le quadrillage pouvait servir à mesurer une aire.

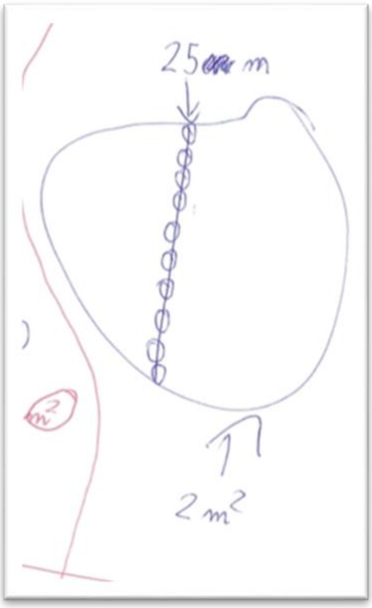


Figure 8 : schématisation, H

Groupe 3 :
Après avoir individuellement écrit sur feuille les données utiles, amorcé des schémas (fig.9) et réalisé des premiers calculs erronés, l'élève R met de côté les quantités de personnes pour ne s'occuper que des m et des m^2.

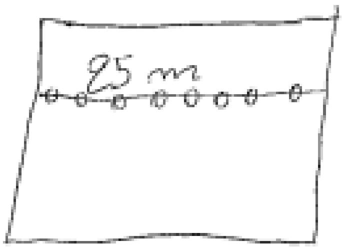


Figure 9 : Schéma initial de R

Le groupe se pose alors la question suivante : « C'est quoi la formule pour transformer des m en m^2 ? ». Pour les élèves, le m^2 est considéré comme une unité de longueur. L'enseignante reformule la question pour amener les élèves à se demander combien de m^2 on peut obtenir avec $25m$ de ligne d'eau, puis réclame un schéma complété très rapidement par R (fig. 10)

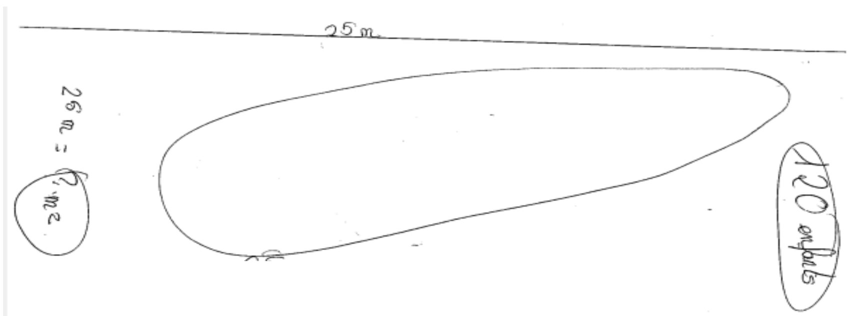


Figure 10 : Seconde représentation de R

L'enseignante évoque les formules d'aires et de périmètres. Celles des aires ne sont pas connues des élèves. L'enseignante demande alors quelle forme la ligne d'eau pourrait avoir sur le lac.

L’enseignante distribue simultanément une feuille quadrillée (carreaux de $1cm$ de côté) et un rhodoïd rectangulaire souple transparent de $25cm$ de long à chaque élève de la classe. Le groupe ne les utilise pas et continue sa réflexion. Procédant par tâtonnement, les élèves cherchent à trouver un périmètre de 25 m au moyen d’un carré de côté $4m$, puis $5m$, puis $6m$, puis $7m$. Ils en déduisent qu’un côté doit mesurer entre 6 et $7m$ donc ils essaient $6{,}4m$ ($P = 25{,}6m$) puis $6{,}2m$ ($P = 24{,}5m$) puis $6{,}3m$ ($P = 25{,}2cm$). R se dit alors que 25 étant impair, il faut plutôt choisir un rectangle. L’enseignante passe et fait remarquer au moyen d’un schéma que la ligne d’eau ne passe pas au bord de la plage donc le rectangle n’aura que trois côtés. Sur feuille blanche d’abord, R représente la ligne d’eau en forme de « rectangle ouvert » avec deux largeurs de $5m$ et une longueur de $15m$ (fig. 11).
La feuille quadrillée est alors utilisée pour représenter la ligne d’eau et la plage.

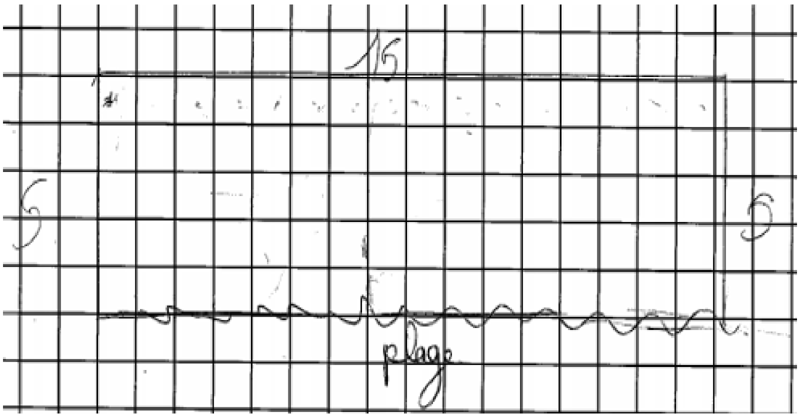


Figure 11 : Représentation de l’élève R sur feuille quadrillée

La conclusion de R est qu’il y a $15cm^2$ en longueur et $10cm^2$en largeur, donc $25cm^2$ en tout ($25m^2$en vrai). Les élèves ne prennent jamais en compte l’intérieur de la zone ainsi délimitée. R effectue une division euclidienne de 25 par 3, ce qui lui donne 8 avec un reste de 1.

Groupe 5 :

Deux élèves posent rapidement des opérations successives comme T, élève de CM1 qui calcule 120×3 puis 25×2. Il écrit ensuite $120 - 3$ et retranche à nouveau 3 au résultat précédent. Puis, il fait $25 - 2$ et retranche à nouveau 2 à la différence obtenue, ce plusieurs fois (fig. 12).

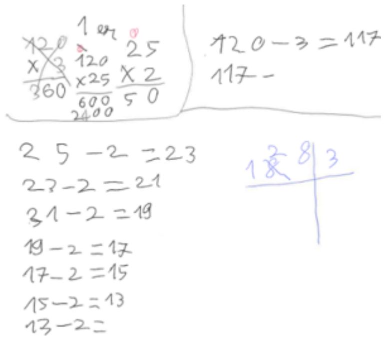


Figure 12 : Extrait brouillon de l’élève T (CM1)

Pendant que l’élève Z représente trois personnes par carreau par des petits disques, R divise 120 par 3 et marque 40 enfants et invalide l’opération 120×25 posée par C en déclarant que « 120 c’est le nombre d’enfants et 25 c’est les mètres ».

Z représente ce qu'elle appelle des « zones dans lesquelles il faut mettre 3 enfants ». Elle a divisé 120 par 3 et trouve comme quotient 11. R questionne la valeur du diviseur 3 et dit « qu'il faudrait diviser 120 par 2 mètres cubes ».

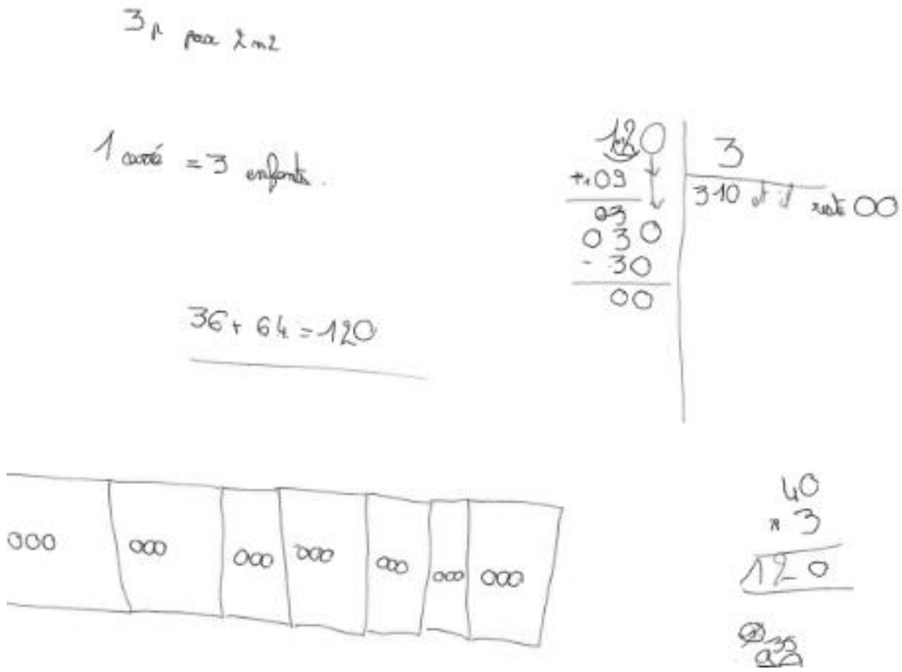
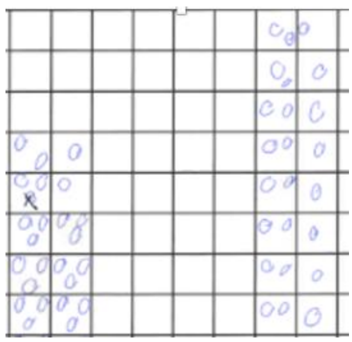


Figure 13 : extrait du brouillon de Z

Z propose de faire un schéma et remet en question la procédure « 25 moins 2, puis 23 moins 2 » de l'élève T. R s'intéresse alors à sa représentation et lui demande d'expliquer ce que sont ses carrés.
L'enseignante distribue simultanément une feuille quadrillée et un rhodoïd qu'elle appelle une « bande » à tous les élèves de la classe, sans en dire plus sur comment l'utiliser.
Le rhodoïd est un rectangle de plastique transparent avec une largeur de 4 cm (cette largeur est celle d'origine du rhodoïd vendu en rouleau pour entourer les gâteaux en pâtisserie) et une longueur de 25 cm. Le groupe utilise alors le rhodoïd à plat qu'il superpose aux carreaux remplis de trois enfants. T et R ont ainsi considéré ensuite l'aire de baignade comme la surface recouverte par le rhodoïd à plat, arrivant à y placer dessous 120 disques.


Deux représentations de T


Zoom sur ses représentations

Sur sa feuille quadrillée, T réalise deux représentations successives : trois personnes par carreau ou encore trois personnes distribués en deux plus une sur deux carreaux côté côte.

L’observateur du groupe ayant rendu très fine la largeur du rhodoïd (de l’ordre de 4 mm), T et R ont alors modifié leur usage du matériel, l’utilisant sur la tranche (voir fig.14).
L’enseignante leur demandant d’entourer la zone de baignade avec le rhodoïd, ils ont considéré une zone circulaire et dénombré le nombre de couples de carreaux (représentant 2 mètre carrés) enfermés dans leur zone.

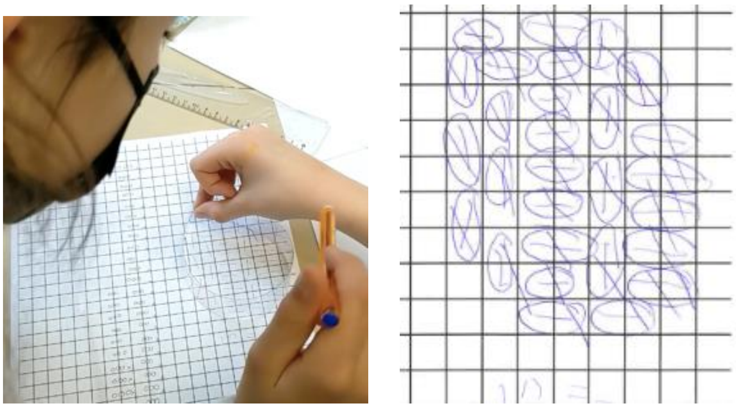


Figure 14 : Extrait de la feuille quadrillée de T et rhodoïd utilisé sur la tranche

Groupe 7 :
Le groupe s’est d’abord lancé dans des calculs de manière individuelle en tentant d’interpréter les données de la loi.

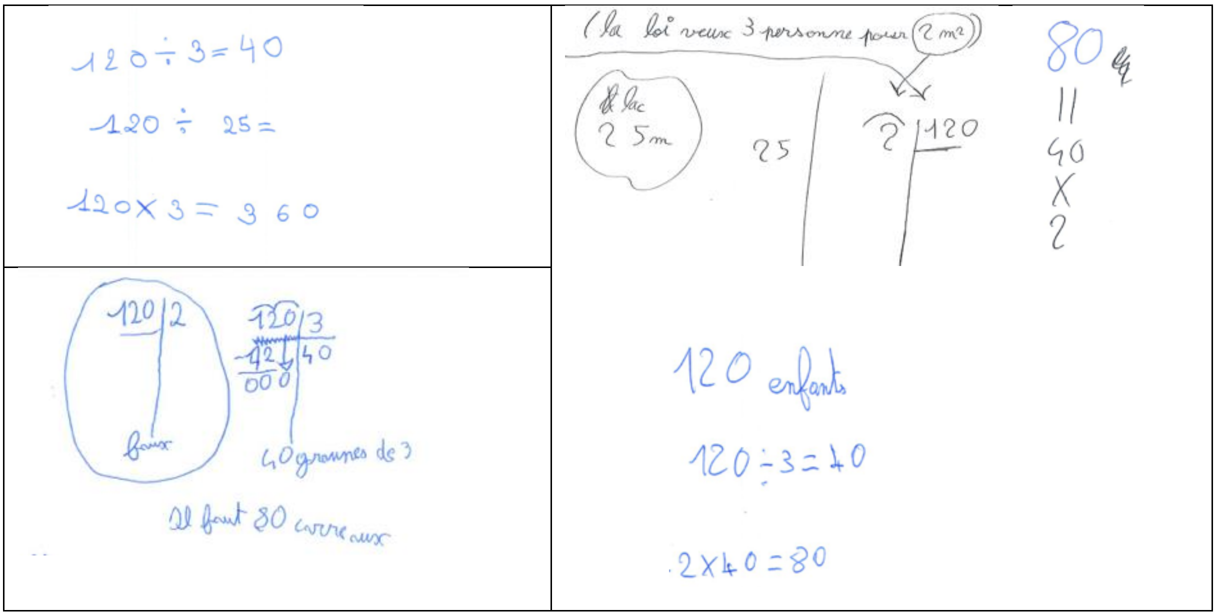


Figure 15 : brouillons d’élèves du groupe 7

Puis les élèves ont échangé et se sont mis d’accord sur les opérations à effectuer en argumentant leurs choix. Ils ont trouvé qu’il fallait 40 groupes de 3 élèves et que cela nécessitait une zone de $80m^2$. Mais ils ont ensuite été bloqués.
Leur premier schéma (fig. 16) sur la feuille quadrillée a montré qu’ils ne maitrisaient pas la notion de surface : ils ont cherché à représenter les $2m^2$ en une ligne continue (2 cases pour $2m^2$).

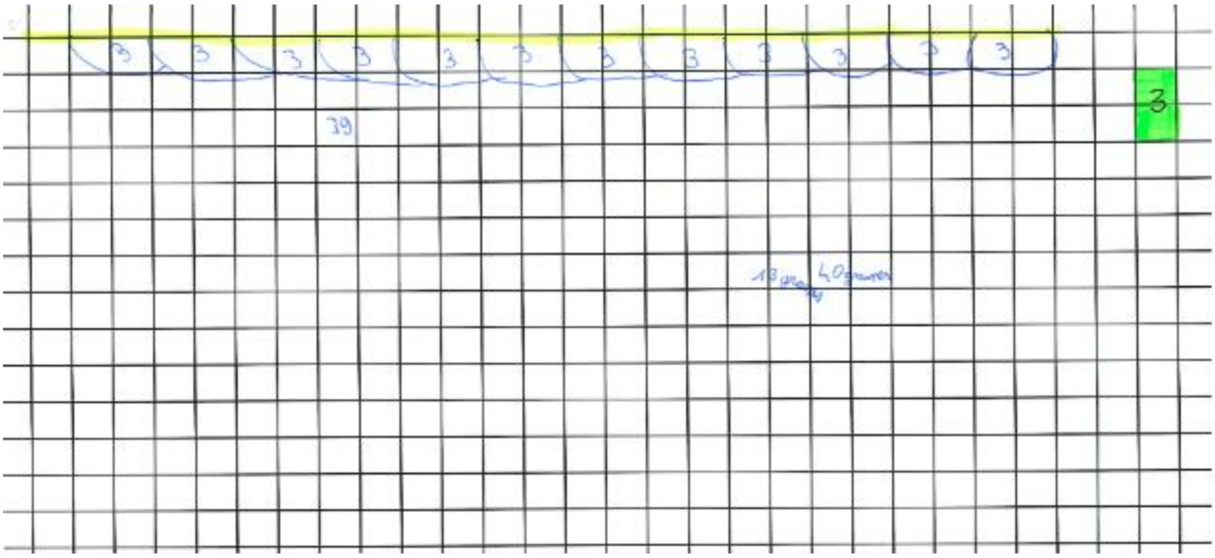


Figure 16 : Premier schéma du groupe 7

L'aide de l'enseignante a permis d'y remédier et de considérer une aire de surface.

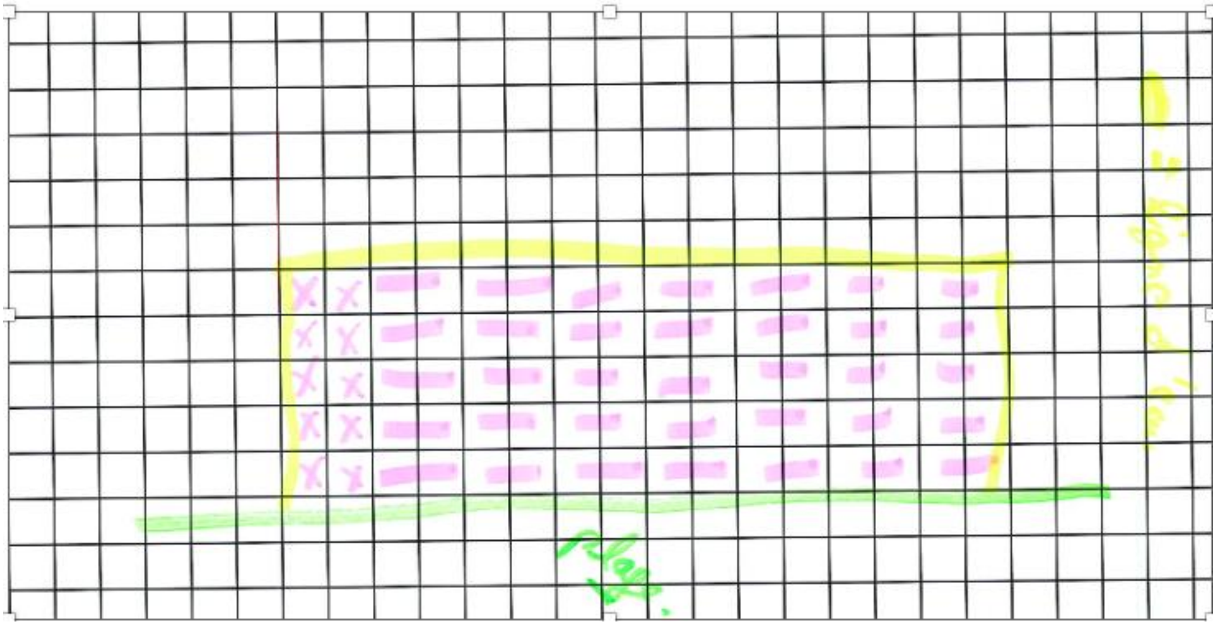


Figure 17 : Second schéma du groupe 7

Deux élèves ont considéré que le côté de la zone de baignade correspondant à la plage ne nécessitait pas de ligne d'eau (fig.17). Certains élèves ont trouvé que la ligne d'eau n'était pas assez longue mais n'ont pas su argumenter.
L'utilisation de la bande plastique, le rhodoïd, leur a finalement fait croire que c'était possible de respecter la loi. Ils n'ont pas compté le nombre de carreaux délimitant la zone de baignade malgré l'incitation de l'enseignante alors qu'ils l'ont matérialisée en couleur sur le schéma.

L'élève P a trouvé qu'il fallait réaliser 40 groupes de 3 personnes. Elle a schématisé (fig. 18) sans quadrillage une zone rectangulaire de 40 groupes de 3 enfants, soit 80 « carreaux » qui lui semblent nécessaires. *A priori*, elle indique qu'il y a assez de m^2 en omettant la contrainte des $25m$ que sa représentation ne prend pas en charge (qui soit dit en passant empêche toute tentative de validation par l'élève). La représentation de P montre qu'elle considère bien une aire avec son remplissage de la zone de baignade ainsi représentée.

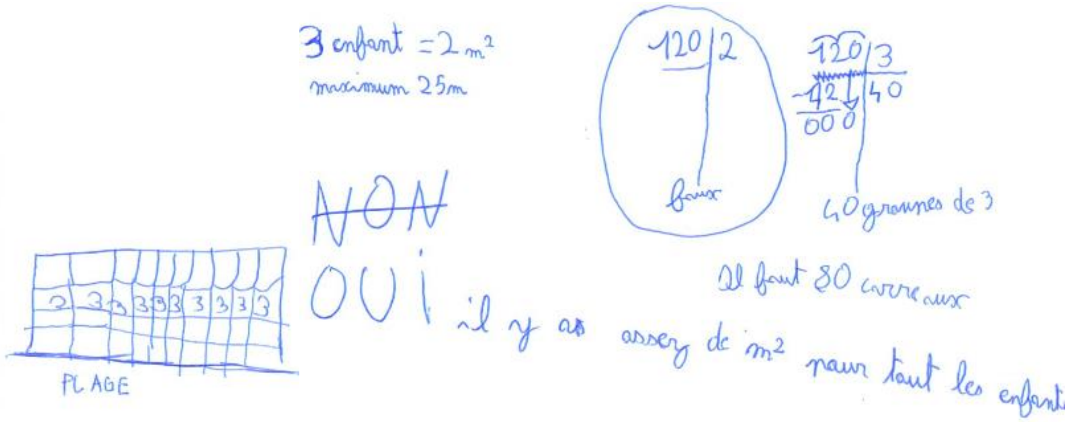


Figure 18 : brouillon de l'élève P

Phase 3 de bilan et institutionnalisation : (20 min)

Voici les grandes étapes de la phase de bilan après le travail de groupe des élèves.

Dans un premier temps, l'enseignante interroge un groupe ayant divisé 120 par 3.
Elle pose en colonne l'opération sous la dictée du groupe puis questionne sur la nature du quotient 40 obtenu.
Elle ajoute la mention « groupe » à 40 (fig.19)

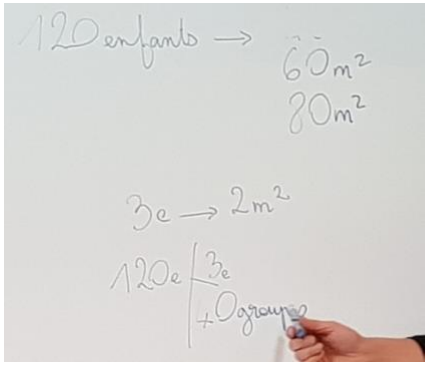


Figure 19 : photo du tableau pendant la phase de bilan

L'enseignante interroge la classe pour savoir si quelqu'un peut dire, dans la vraie vie, à quoi correspond un mètre carré. Un élève répond « La moitié de la classe ». L'enseignante présente alors un premier carton d'un mètre de côté.
L'enseignante balaie de sa main (fig. 20) le carton et dit « 1 mètre carré, c'est cette surface-là ».

Figure 20 : Carton d'1m² montré et geste de la main en phase de bilan

L'enseignante indique qu'on a besoin de 80 fois ça pour que tous les enfants se baignent et ajoute que ça fait une grande superficie.
Une élève vient ensuite représenter l'aire de baignade de son groupe au tableau (fig.21) en commençant par des horizontaux traits (40) reliant deux carreaux du support quadrillé projeté.

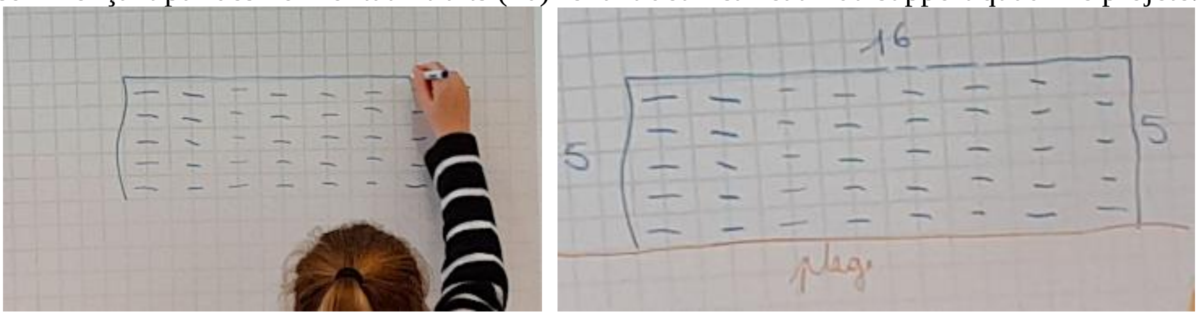


Figure 21 : Présentation par une première élève d'un travail de groupe en phase de bilan

Elle délimite ensuite le contour de cette zone de baignade rectangulaire. L'enseignante ajoute la plage sur sa représentation. L'élève indique 5 en largeur et 16 en longueur. L'enseignante indique que la ligne d'eau fait alors 26 mètres et non 25.
Un second élève vient exposer la solution de son groupe : il présente un rectangle de longueur 15 m et de largeur 5 m (fig. 22). L'enseignante demande comment se passer du dessin pour trouver le nombre de carreaux.

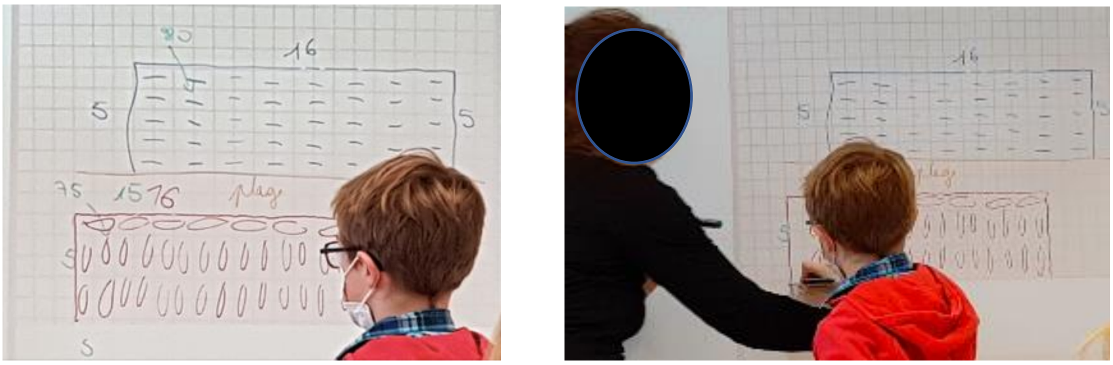


Figure 22 : Présentation par un élève d'un second travail de groupe en phase de bilan

Un élève de la classe propose de multiplier 5 par 15 et annonce le produit $75m^2$. L'élève au tableau commence alors à ajouter une colonne de 5 carreaux à gauche pour arriver à $80m^2$, mais il est stoppé par l'enseignante quand il tente d'ouvrir la ligne d'eau en effaçant des mètres en trop pour obtenir $25m$.

Une élève d'un troisième groupe présente au tableau une zone de baignade circulaire à l'aide de son rhodoïd (fig.23). L'enseignante refait alors son geste en disant « Elle a pris sa ligne d'eau, elle l'a fermée » Puis l'enseignante lui dit : « À mon avis, tu aurais pu laisser le bord de la plage, tu aurais encore gagné des mètres. » Elle demande comment les élèves s'y sont pris, puis présente une zone de baignade semi-circulaire à l'aide du rhodoïd et précise qu'elle aurait pu donner l'indice de la plage.

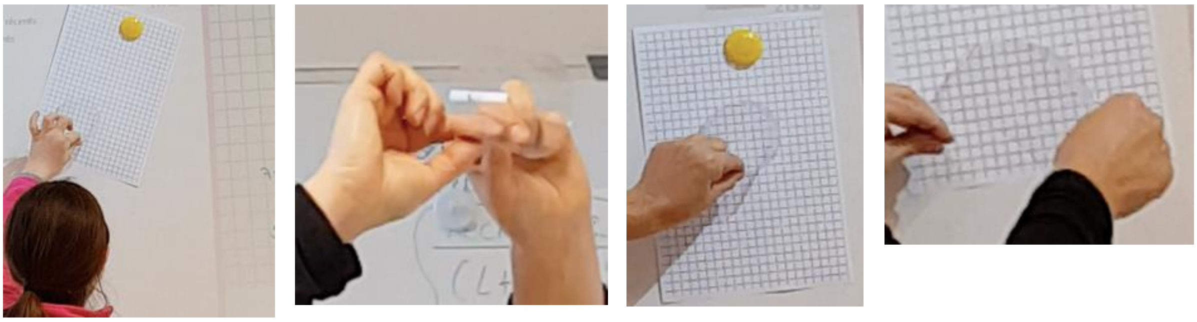


Figure 23 : Présentation d'un troisième travail de groupe, puis gestes de l'enseignante

Analyse a posteriori du scénario

Dans cette section toutes les alternatives et modifications apportées par le collectif après la leçon collectivement mise en œuvre sont repérées en bleu.

Grâce à la leçon de recherche, le collectif a conscientisé que la bande plastique transparente de largeur 4 cm et de longueur 25 cm n'avait pas servi à matérialiser la ligne d'eau mais une zone de baignade rectangulaire en la posant à plat. Il a exprimé qu'il aurait été indispensable de la rendre plus fine (d'une largeur de moins d'un cm) pour qu'elle puisse matérialiser une ligne d'eau entourant une zone de baignade circulaire ou semi-circulaire. Aussi, le collectif a décidé d'envisager des alternatives en termes de matériel.

Matériel Concernant le matériel initial (fig.24), des modifications ont été repensées.

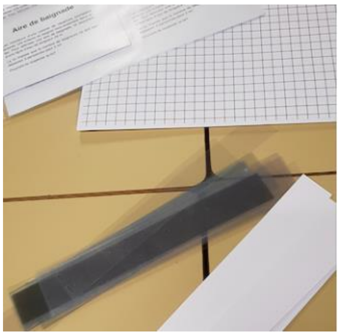


Figure 24 : Photo du matériel avant la leçon

Pour le collectif, il fallait prévoir une largeur fine de bande plastique ou remplacer le rhodoïd par un fil de scoubidou (avec du fil de fer intérieur de façon à ne pas être mou) ou encore proposer de la laine (soupçonnée cependant d'être peut-être trop molle).

Concernant les objectifs, le collectif a ajouté celui secondaire de faire travailler les élèves sur la proportionnalité, considérant que ce n'est pas la situation idéale pour introduire celle-ci.

Les phases du scénario ont été réajustées comme suit :

La phase 1, initialement de 10 min a semblé trop longue et a été réajustée à 4 min afin de laisser plus de temps pour la phase 2 de travail individuel dont le temps a doublé (10 min au lieu de 5 min). Un temps de reformulation y est inséré introduit par l'enseignant qui demanderait à la classe « Qu'est-ce qu'on cherche ? ». L'enseignant montrerait ensuite des photos (de ligne d'eau, de lac), ce qui viserait une explicitation de type : « On vise une forme qui permet de faire rentrer les 120 enfants dans le lac. »

La phase 3 de travail de recherche en groupe, si elle garde la même durée, est réajustée en précisant la suppression de la possibilité de lever la main. Le collectif préconise plutôt une circulation systématique dans chaque groupe.
Après la pause des élèves, l'enseignant demanderait :
P « Qu'avez-vous commencé à faire ? »
P noterait au tableau les deux entrées dans la résolution du problème (en supposant que cela a été trouvé au moins par un groupe) :

Il faut 80m^2	Des premières formes dessinées

Le collectif envisage aussi que l'enseignant pose 2 m^2 au sol et qu'il fasse venir des baigneurs élèves.
P dirait « Un mètre carré sert à mesurer une surface remplie ». On présente un carton carré de 1m^2 et on marque 1m^2 sur le carton et ensuite sur un quadrillage projeté au tableau. La légende serait ajoutée en direct au tableau avec ensuite matérialisation de la ligne (par une corde par exemple).

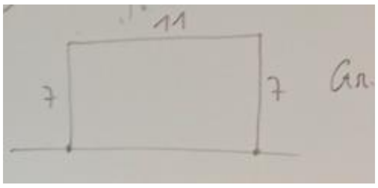
Phase 4 de bilan et institutionnalisation : (20 min)
Exposition des procédures de groupes à l'oral.
Changement d'ordre des étapes 1 et 2 initialement prévues.

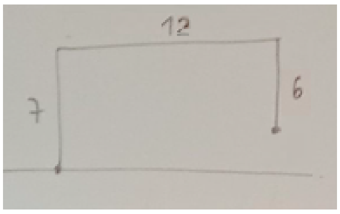
Étape ~~2~~ 1 :
P interroge un groupe qui a obtenu 80m^2
Il faut au moins 80m^2
Vidéo projection d'un quadrillage
Expliquer le passage de 40 groupes de 3 élèves à 80m^2
120e : 3e = 40 groupes de 3e
Justification du 80m^2 à prévoir soigneusement
1 groupe utilise 2 m^2
40 groupes utilisent 40 fois plus donc 80m^2
Utiliser un tableau couplé à des phrases :

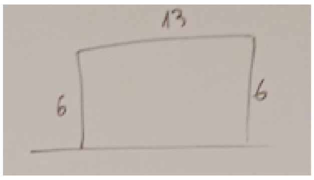
3 enfants	30 enfants	60 enfants	120 enfants
$2m^2$	$20m^2$	$40m^2$	$80m^2$

En tant que facilitateurs, nous faisons remarquer au lecteur que le tableau précédent imaginé après la leçon par le collectif ne correspond pas au même raisonnement que celui repéré dans les travaux de certains groupes d'élèves.

Étape ~~1~~ 2 : Les différentes zones de baignade
P « Quelle forme avez-vous choisi comme zone de baignade ? »
P schématise les zones et inscrit les longueurs et aires
Support quadrillé nécessaire pour vidéo-projection

<table>
<tr>
<td>Un rectangle $7m; 11m; 7m$


$7m + 11m + 7m = 25m$
Calcul d'aire : $77m^2$ (ou annoncé 77 carreaux)</td>
<td>Un rectangle $7m; 12m; 6m$


$7m + 12m + 6m = 25m$
Rectangle avec ouverture d'1 m sur une largeur
Calcul d'aire : $84m^2$ (ou annoncé 84 carreaux)</td>
</tr>
<tr>
<td>Un rectangle $6m; 6m; 13m$

</td>
<td>Un carré
Représentation d'un carré de $8{,}3m$ de côté

$8{,}3m + 8{,}3m + 8{,}3m = 24{,}9m$
L'aire vaut un peu plus de $64m^2$</td>
</tr>
</table>

Le demi-disque s'il apparait	**Rectangle avec ouverture** d'$1m$ sur une largeur Calcul d'aire : $84m^2$ (ou carreaux)

P écrit au tableau :
Bilan : Avec une même longueur de 25m, on peut trouver plusieurs formes d'aires différentes.
P distribue une trace écrite sur les deux grands types de procédures que les élèves ont initiés pour résoudre le problème (soit en considérant d'abord la loi, soit en choisissant d'abord un modèle géométrique pour la zone de baignade et ensuite en estimant son aire). La trace écrite s'appuie en particulier sur les zones obtenues par les élèves, en se limitant ou pas à des entiers pour les zones rectangulaires.
Elle reste à adapter selon ce qui s'est produit en classe et contiendra forcément une phrase du type « *À longueur fixée, l'aire de la zone de baignade peut varier.* »

Étape 3 :

Conclusion Pour résoudre ce problème, on a choisi différentes formes de zones de baignade (selon)
Avec les rectangles on n'a pas réussi à atteindre $80m^2$.

Au final, le tableau partagé en plusieurs zones pourrait prendre la forme suivante.

<table>
<tr><td>Zones proposées</td><td rowspan="2">Rectangle 3

Dessin + longueur + aire</td><td>Aire minimale</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rectangle 1

Dessin + longueur + aire</td><td>Il faut une zone de plus de $80m^2$

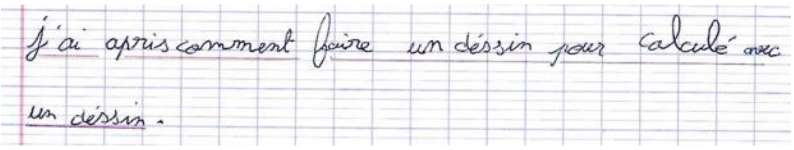
Calculs</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Le carré

Dessin + longueur + aire</td><td>Conclusion</td></tr>
<tr><td>Rectangle 2</td><td>On a choisi différentes formes.
- Avec des rectangles nous n'avons pas</td></tr>
</table>

Dessin + longueur + aire	Le demi-cercle Dessin + longueur + aire	réussi à atteindre $80m^2$. Nous ne savons pas si c’est possible. - *Avec un demi-cercle,* c’est possible.

Remarques :

Voici un retour d’élève retenu car assez emblématique de ce qui s’est produit dans les groupes, après manipulation du rhodoïd.



Réponse d’élève à la question *Qu’avez-vous appris ?*

Restructuration *a posteriori* de l'organisation du bilan et tableau

Le collectif a pensé des alternatives liées à la phase de bilan détaillée en pages14-16.
Un support quadrillé à projeter, non prévu initialement, s’est révélé nécessaire lors du bilan final d’autant que les productions des groupes n’ont pas été scannées dans la foulée entre la pause des élèves et leur retour en classe.
La question d’un travail à une certaine échelle est à expliciter en classe : ici deux types de quadrillage ont été utilisés en rendant transparent un travail passant de m^2 aux cm^2 ou dans une autre unité d’aire (embarquée par le matériel prévu par l’enseignante).
Dans une classe ordinaire (sans les contraintes liées à la temporalité de la LS), deux temps distincts (voire trois) pourraient être envisagés pour ce bilan. Un premier temps serait consacré aux types de zones de baignade apparues en classe (rectangles, disques, demi-disque, autre). Un second temps (lors d’une autre séance) pourrait se focaliser sur les zones rectangulaires, et pourquoi pas un troisième temps ultérieur consisterait à estimer l’aire d’un demi-disque.
Un premier **énoncé alternatif** a été proposé, plus simple. Il consiste à ajouter
« Pour avoir assez de place pour se baigner, il faut $80m^2$. »
Ceci évite tout le travail en lien avec la proportionnalité mais dépend des objectifs fixés.

Prolongements imaginés
Prolongement 1, la séance suivante : Pour le disque et demi-disque : prévoir une feuille avec quadrillage et formes déjà là pour encadrer leur aire.
Prolongement 2 : Formes sur quadrillage à réaliser avec aire de $80m^2$.
Prolongement 3 : Formes sur quadrillage à réaliser avec $25m$, trouver les différentes aires

4. Grille d'Interventions possibles de l'enseignant

La grille d’intervention est structurée en trois colonnes précisant, au milieu, l’intervention de l’enseignant, entouré de ce qui motive son usage et ses effets attendus en classe. Les interventions pensées initialement sont en noir et celles ajoutées post-leçon sont en bleu.

Phases	Déclencheur d'intervention	Interventions	Effets attendus, buts
1	L'élève questionne le mot ligne d'eau	Montrer une photo de ligne d'eau	Comprendre qu'on ne parle pas de la ligne d'eau-couloir de piscine mais d'une chaîne de flotteurs
1	La lecture par un élève de « m^2 » pose problème , par exemple « m deux »	Si « m deux », P écrit m^2 au tableau et interroge le groupe classe P « Est-ce que vous savez ce que c'est un mètre carré ? »	Débloquer la lecture mètre carré oralisée Permettre de comprendre la condition 3 personnes pour $2m^2$.
1	Les élèves ne comprennent pas la signification de ce qu'est 1 mètre carré	P montre 1 mètre de tissu Puis P trace au tableau un segment d'1 m (avec la règle jaune) Et P matérialise au sol 1 m^2 pour y faire entrer des élèves	Aider à la représentation concrète d'un mètre carré
2	Un groupe présente une zone fermée	P montre une photo de bord de lac (avec plage rectiligne) P « Quand tu es à la plage, est -ce que tu lèves les pieds pour entrer dans la zone ? » P « On ne peut pas franchir la ligne d'eau (au loin ou au près) »	Faire évoluer les zones fermées en zones avec un côté rectiligne
2	L'élève/ le groupe enclenche des dessins de carrés avec trois individus	P peut proposer la feuille quadrillée	Impulse une représentation à l'échelle ou aide à mettre en relation les données. Oriente vers l'aire

2	Un élève demande « comment transformer des mètres en mètres carrés » ?	P utilise le tissu et le montre à toute la classe	Différencier m et m^2 et leur donner du sens.
2	Le groupe a fait 120 : 3 = 40 et s'arête	P demande à quoi correspondent 120, 3 et 40 et pourquoi on divise ici ?	Permettre d'identifier des groupes de trois
2	Les élèves alignent 3 enfants sur 2 m de ligne d'eau	P fait imaginer une ligne d'eau sur le lac et des nageurs accrochés à la ligne	Montrer que les nageurs occupent une surface.
2	Les élèves proposent un rectangle invalide de type 5-16-5 qui permet d'atteindre 80 m^2	P demande la longueur de la ligne d'eau	Les faire constater que la contrainte des 25 m n'est pas respectée.
2	Élève se demande s'il faut compter la plage	P s'appuie sur la scénarisation intermédiaire	Éviter de compter le bord de la plage.
2	Un groupe confond m et m^2 avec le quadrillage	P identifie sur un carreau 1 m comme la longueur du côté et 1 m^2 comme aire d'un carreau.	Faire distinguer les deux grandeurs en jeu

5. Le mot de l'équipe de formation-recherche

Voici un retour sur les questions soulevées par « Aire de baignade » lors de la Lesson Study.

Obstacles en lien avec la modélisation

- Point crucial : le degré d’ouverture de la situation

Le guide Éduscol *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen* (MENJS, 2022b) présente un cycle simplifié (fig.25) en quatre phases inspiré du modèle de Verschaffel & De Corte (2008). Ce cycle inclut la modélisation. Il *permet d’analyser les productions des élèves lors de la résolution de problèmes verbaux à données numériques : comprendre, modéliser, calculer, répondre.* (ibid, p.44).

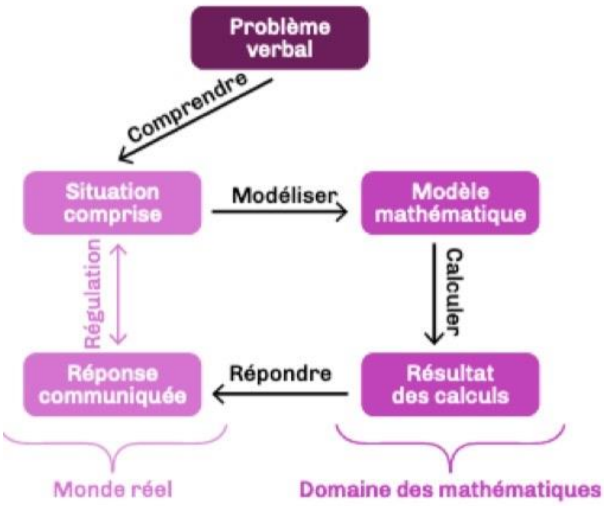


Figure 25: Modèle retenu pour la résolution de problèmes. (fig.4, p.44, MENSER, 2021)

S’il distingue un travail dans le monde réel et le domaine des mathématiques, envisager le cycle de modélisation de Blum & Leiß (2007) permet de mieux en cerner les différentes étapes. Par exemple, une façon de passer de la situation réelle à la situation modèle (voir fig. 26) est d’exclure les plages non rectilignes. Ce choix, qui permet de faire travailler sur les objectifs visés, doit être fait en conscience puisque d’autres situations peuvent être envisagées. On pourrait alors très bien imaginer une séquence sur les aires de baignades découpées en plusieurs séances et qui permettrait d’envisager différentes situations selon les choix de modélisations effectués :
– séance 1 : plage rectiligne, forme rectangulaire avec l’étude de l’aire de rectangles adossés à une droite de périmètre fixés ;
– séance 2 : plage rectiligne et ouverture sur d’autre formes géométriques (trapèzes, cercle, etc) ;
– séance 3 : plages non rectilignes (voir fig. 27).

Ce découpage, il en existe sans doute d’autres, permet alors de se fixer des objectifs clairs qui visent à faire travailler les élèves sur les notions mathématiques d’aire et de périmètre ou sur des compétences plus larges de modélisation. Le traitement mathématique est différents d’un modèle à l'autre et gagne en complexité au fur et à mesure de l'ouverture vers de nouvelles formes géométriques.

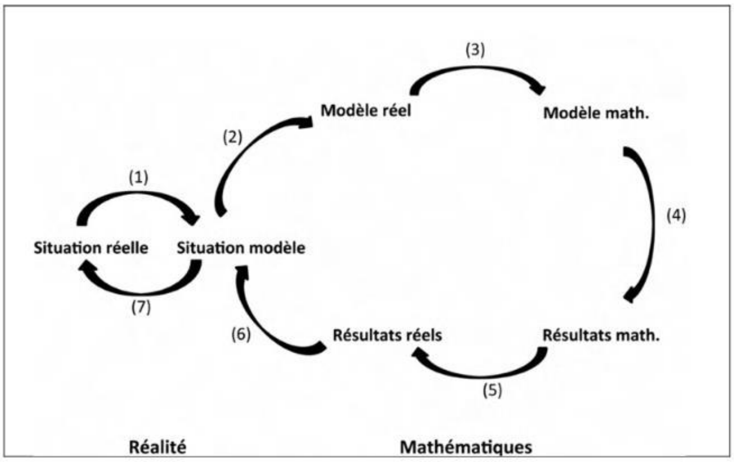


Figure 26 : Cycle de modélisation de Blum & Leiß (2007), étapes traduites par Derouet (2016)

Figure 27 : Photo d'une véritable zone de baignade

Source : https://www.lacsdeleaudheure.be/zones-de-baignade

Le choix d'une ouverture très large de la situation a permis au collectif de prendre conscience que si cette ouverture est un défi enthousiasmant pour une expérimentation collective, elle peut aussi apparaître comme un frein sur les objectifs visés. Ce frein peut prendre au moins deux formes. Premièrement, le contrat didactique est rendu flou. Quel est le travail de l'élève ? Dans quelle mesure a-t-il la possibilité de faire des choix simplificateurs ? Quel type de réponse est attendue ? Quel type de validation ? Toutes ces questions doivent être prises en charge par l'enseignant pour asseoir un contrat didactique nouveau. Deuxièmement, la gestion de la classe peut s'avérer très difficile dans le cas où une multitude de modèles ont pris vie en classe. Quelle connexion entre les différents groupes d'élèves qui travaillent sur différents modèles ? Comment, dans ce cas, organiser des plénières de régulation ? Comment unifier le travail des élèves sur différents modèles alors que les objectifs pédagogiques peuvent être différents d'un modèle à l'autre ? Et enfin, comment organiser un bilan en lien avec les travaux des élèves alors que ceux-ci peuvent être de nature assez différente ?
Toutes ces questions ne signifient pas qu'il est nécessaire de fermer complètement la tâche pour revenir à un rectangle adossé à une droite. Elles permettent de prendre conscience qu'une organisation pédagogique fine est à prévoir et que, comme proposé précédemment, plusieurs séances peuvent être consacrées à cette situation de l'aire de baignade.

- Polysémie de l’expression « ligne d’eau »

L’étape de compréhension du cycle (fig. 10) inspiré du modèle de Verschaffel & De Corte (2008). La compréhension de l’énoncé passe évidemment par une compréhension des termes qui le composent. Les expérimentations on montré q’un premier obstacle est la polysémie de l’expression « ligne d’eau ». En effet, une ligne d’eau désigne à la fois dans une piscine un couloir délimité par une chaîne de flotteurs mais également la chaîne en question (fig. 28). Dans la classe, il sera nécessaire de lever le doute sur ce double sens et d’exclurer le couloir pour ne garder que la chaîne de flotteurs de façon à ce que tous les élèves puissent rentrer dans la tâche sans cette ambiguïté.

Une ligne d'eau est constituée de flotteurs en plastique

Couloir délimité par des lignes d'eau

Figure 28 : Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Ligne_d%27eau

- La loi

Premièrement, elle a été simplifiée par rapport à l’article de loi en vigueur qui distingue les plans d’eau couverts et en plein air.

Transféré par Décret n°2008-990 du 18 septembre 2008 - art. 1 Modifié par Décret n°2006-676 du 8 juin 2006 - art. 2 () JORF 10 juin 2006 (extrait) *La fréquentation maximale instantanée en baigneurs présents dans l'établissement ne doit pas dépasser trois personnes pour 2 mètres carrés de plan d'eau en plein air et une personne par mètre carré de plan d'eau couvert.*

Ensuite, son énoncé ne précise pas le nombre d’adultes qui doivent être dans l’eau avec les enfants. Ce point peut être questionné par des élèves en classe. Considérer ou non des adultes peut avoir des conséquences sur la solution en jeu.
Enfin, elle demande aux élèves un raisonnement autour de la proportionnalité pour déterminer le nombre de personnes maximal dans une surface donnée, ce qui est précisé en page 27.

Obstacles intra-mathématiques

Problème d’optimisation

Résoudre un problème d’optimisation c’est quoi ? Cette question trouve des réponses selon le niveau d’enseignement de la situation « Aire de baignade ». Nous n’attendrons pas le même travail de preuve au cycle 3 et en classe de lycée de la part des élèves pour la justification du résultat. Le guide sur la résolution de problème donne une définition de ce qu’est la résolution d’un problème d’optimisation comme suit :

De manière plus générale, au cours moyen, les problèmes d'optimisation consisteront à trouver la meilleure solution possible parmi un ensemble fini de solutions, comme dans le problème suivant : « *Parmi les rectangles qui ont leurs côtés mesurant un nombre entier de centimètres et dont le périmètre est 20 cm, détermine celui qui a la plus grande aire.* »

Figure 29 : extrait Éduscol « Résolution de problème au cours moyen » (MENJS, 2022b, p.38)

L'exemple cité ci-dessus (fig. 29) a des points communs avec l'aire de baignade et peut constituer une situation de recherche située en amont dans la progression. Elle diffère bien sûr de l'aire de baignade sur au moins trois points.
D'abord, la modélisation en est absente puisque la situation est une situation géométrique. Il n'y a donc aucun choix de modélisation à effectuer.
Ensuite, seulement des rectangles sont étudiés. La situation générale qui ne se limiterait pas à un rectangle n'aurait d'ailleurs pas de solution...
Enfin, pour résoudre l'exercice, seul un nombre fini de cas est à prendre en compte puisque les côtés du rectangle mesurent un nombre entier de centimètres. Cette différence majeure est l'un des points cruciaux de la situation de l'aire de baignade. Il y a une infinité de formes à envisager.
En se restreignant à des zones de baignades rectangulaires, des élèves pourraient très bien conclure qu'avec des rectangles, on ne peut pas respecter la loi. Bien sûr, ces élèves n'auront pas théoriquement étudié tous les cas. En effet, comment prouver que la profondeur de l'aire de baignade rectangulaire est de 6,25 m et que dans ce cas le 80 m² ne sont pas atteints ? Les outils mathématiques que les élèves ont en possession dans le premier degré ne le permettent évidemment pas. Une conclusion plus rigoureuse et surtout plus cohérente avec le travail engagé en classe serait « Nous n'avons pas trouvé d'aire de baignade rectangulaire dont l'aire dépasse 80 m² mais nous ne savons pas prouver qu'il n'en n'existe pas ». A la fin du cycle 4, les élèves de collège disposent de la notion de fonction et notamment de la représentation graphique d'une fonction qui permet alors d'apporter alors une réponse argumentée en visualisant une courbe (celle de la fonction $x \to x(25 - 2x)$ qui reste en-dessous de la droite d'équation y = 80.

La proportionnalité

Une fois divisé 120 enfants par 3, beaucoup d'élèves trouvent 40 mais se heurtent à l'interprétation du quotient « 40 quoi ? ». Plusieurs réponses peuvent être apportées. D'abord, 40 peut être vu comme un scalaire qui exprime que 120 vaut 40 fois plus que 3. Ce coefficient multiplicateur s'applique à 2 m^2 pour l'obtention des 80 m^2.
Ensuite, plus concrètement, 40 peut être interprété comme le nombre de groupes de 3 enfants. Chaque groupe ayant besoin de 2 m^2, 40 groupes auront besoin de 40 fois plus d'espace pour nager, c'est à dire 40 fois 2 m^2 soit 80 m^2.
Les itérations de LS « aire de baignade » montrent que c'est un point crucial que de donner du sens au nombre 40 et de prévoir en amont de la séance une intervention de l'enseignant.

3 enfants	120 enfants
2 m^2	80 m^2

× 40

Les grandeurs en jeu

Ici deux grandeurs sont en jeu : longueur et aire. C'est aux élèves de faire appel à ces grandeurs et de les relier. Si l'aire est présente dans l'énoncé initial dans le titre, elle l'est uniquement par une unité mentionnée (des mètres carrés notés m^2) dans l'énoncé choisi par les enseignants.

Grandeur longueur

L'usage de formules, que ce soit du périmètre d'un carré ou d'un rectangle, sont inopérantes ici car les figures considérées ne sont pas fermées. Il faut alors revenir à la notion de longueur d'une ligne brisée dans le cas des zones de baignade polygonales et à la notion de longueur d'un cercle qui fait intervenir le nombre π. Les expérimentations en classe ont montré l'usage et les limites du matériel pour appréhender cette notion dans la situation présente.

Grandeur aire

Si la situation « Aire de baignade » est riche tant elle peut réinterroger le concept d'aire déjà rencontré, elle permet de travailler les points suivants :

- Envisager une zone « complexe » (demi-disque, patatoïde), estimer son aire
- Mobiliser des formules d'aires si nécessaire

La situation « Aire de baignade » n'est bien sûr pas recommandé pour initier les élèves au concept d'aire. Une gradation et diversité du travail sur le concept d'aire permettra de donner du sens à cette grandeur. Il est tout à fait raisonnable de considérer que savoir ce qu'est un m^2 est un prérequis pour cette situation et que la notion d'aire ait déjà été travaillée dans d'autres situations issues du monde réel ou purement géométriques.

Dialectique entre ces grandeurs

Dans la résolution de l'aire de baignade, spontanément, certains élèves font référence aux longueurs et représentent 3 enfants sur $2m$ de ligne d'eau. Il apparaît nécessaire de confronter les élèves aux deux grandeurs *aire* et *périmètre*s réunis dans une même situation, l'objectif étant de construire la connaissance qu'à périmètre fixé, l'aire peut varier.
C'est une des préconisations présente dans le guide Éduscol sur *La résolution de problèmes mathématiques au collège* (MENJS, 2022a) :

> *Les périmètres et les aires, d'abord rencontrés séparément, sont ensuite travaillés simultanément, en particulier pour déconstruire des représentations erronées du type « si le périmètre augmente, l'aire augmente ». (Ibid, p.176)*

Le lecteur trouvera en annexe 2 des pistes de ressources permettant un travail simultané sur les deux grandeurs aire et périmètre. L'annexe 3 propose des situations sur les aires uniquement.

Apports didactiques complémentaires

Grandeur aire

En complément, il nous semble intéressant de rapporter des résultats de la recherche en didactique. Selon Douady et Perrin-Glorian (1989) :
les élèves développeraient au sujet de l'aire une « conception forme » liée au cadre géométrique ou (sans exclusion) une conception nombre liée au cadre numérique, de façon indépendante. Ils traiteraient les problèmes sans établir de relation entre les deux points de vue. (Douady & Perrin-Glorian, 1989, p.395).

Leurs recherches ont révélé plusieurs aspects liés à l'enseignement de cette grandeur qui sont à souligner tant leur connaissance permet de mieux appréhender des situations de classe comme l'aire de baignade.
Moreira Baltar & Comiti (1994) s'appuient sur des travaux de Douady et Perrin-Glorian, en particulier, elles indiquent que le concept d'aire exige de dissocier trois pôles :

- *le géométrique avec les surfaces ;*
- *celui des grandeurs avec les aires indépendantes de la forme et de quelque unité de mesure que ce soit ;*
- *celui numérique lié aux mesures. (ibid, p.6)*

Pour les mêmes chercheures, un rapprochement hâtif entre grandeurs et nombres favorise l'amalgame des grandeurs (longueurs et aires par exemple).
Elles insistent également sur le fait qu'en général, dans les classes, le point de vue adopté est de choisir une unité puis d'identifier aires et mesure, ce qui favorise uniquement deux pôles sur les trois (surfaces et nombres). Enfin, chez certains élèves, la conception d'aire associée à une formule est dominante et semble « *éluder chez eux tout autre considération* ».

Modélisation et fragments de réalité

Le cycle de modélisation d'Yvain-Prébiski (2021) enrichit celui de Blum & Leiss (2007), en y précisant les mathématisations horizontale et verticale (fig. 30). Cette double focale permet, de notre point de vue, de creuser d'un point de vue didactique la situation « aire de baignade » côté modélisation.

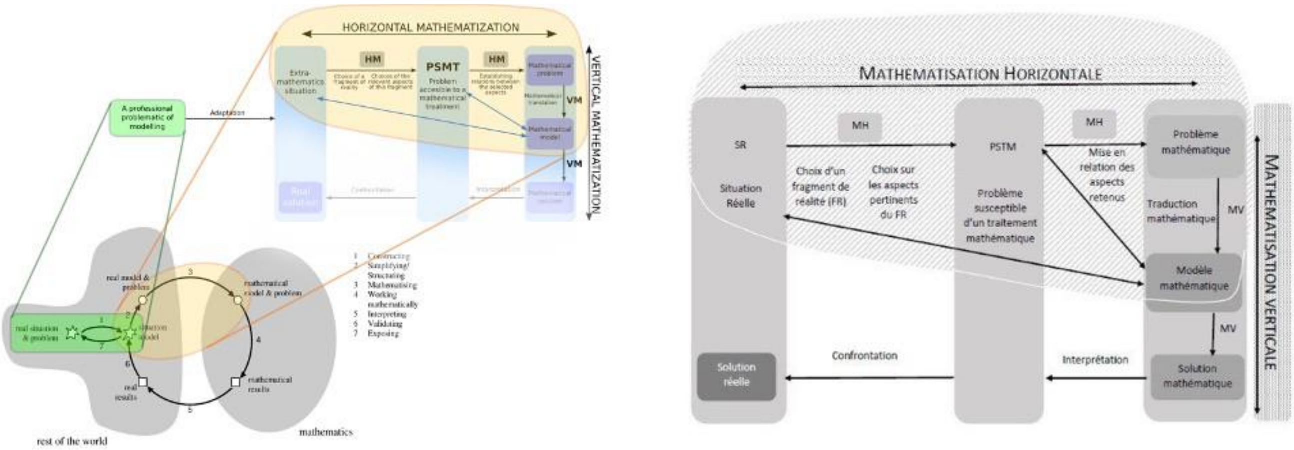


Figure 30 : Cycle de modélisation d'Yvain-Prébiski (2021), détail de la mathématisation horizontale

Pour la mathématisation horizontale, il s'agit d'identifier ou de décrire les mathématiques spécifiques dans un contexte général, de schématiser, formuler et visualiser un problème de différentes façons, de découvrir des relations, des régularités, ou encore de transférer un problème du monde réel à un problème mathématique. La mathématisation verticale comprend la formation d'un modèle mathématique (ou de plusieurs combinés entre eux), sa généralisation, son ajustement.

Derouet et Yvain-Prébiski (à paraître) ont dégagé des fragments de réalité de cette situation à considérer, comme la ligne d'eau, la forme du lac. De plus, Yvain-Prébiski & Masselin (en cours) ont obtenu des premiers résultats liés aux deux fragments de réalité *ligne d'eau* et *zone de baignade* en lien avec le matériel envisagé par les enseignants pour la classe. Si les collectifs d'enseignants imaginent un usage spécifique du rhodoïd ou d'une pelote de laine par les élèves en guise de ligne d'eau (Duthil & Masselin, à paraître), les élèves, eux, y affectent un usage tout autre en matérialisant une partie du lac. Ceci engendre des malentendus et difficultés dans la classe. Nous renvoyons le lecteur aux deux actes à paraître, qui leurs permettront de creuser l'importance des fragments de réalité dans le contexte de résolution du problème de l'aire de baignade.

6. Les « karedos » en Cycle 2 : prolongement de la LS « aire de baignade »

Éric Minot, PEMF et RMC normand, est co-auteur de ce cahier de LS. Dans l'annexe 4, il relate l'expérience qui a eu lieu dans sa classe de CP dédoublée en 2021-2022 et donne les grandes lignes de cette expérimentation qui part d'un questionnement personnel :

Dans la continuité de la Lesson Study "Aire de baignade" s'est posée la question suivante : "Des élèves de CP sont-ils capables de différencier les notions d'aire et de périmètre ?" D'où cet essai de transposition de la situation initiale dans une classe de CP dédoublée :

La lecture de cette annexe vous permettra d'envisager l'« aire de baignade », cette fois au cycle 2, avec une suite de séquences détaillées.

7. Conclusion

En conclusion, ce « classique » revisité permet un travail mathématique visant des objectifs de modélisation, de travail sur la conception des grandeurs.

Aux niveaux scolaires envisagés dans le présent cahier de LS, les élèves n'ont pas tous les outils pour résoudre théoriquement la situation. En revanche, si le nombre de zones de baignade testé est suffisamment important dans la classe, une solution provisoire pourra être de dire qu'aucune zone de baignade ne convient. L'enseignant devra être vigilant et faire remarquer « si nous n'avons pas trouvé de zone adéquate, cela ne signifie pas qu'elle n'existe pas ». L'ouverture du problème à des formes non rectangulaires permet d'accéder au demi-cercle qui offre lui une aire maximale d'un point de vue mathématique mais non optimale d'un point de vue pragmatique. Une des adaptations de la situation de l'aire de baignade consiste à considérer la loi comme une variable didactique. Par exemple, des enseignants pourraient proposer que la loi impose 80 m^2 minimum, le but étant de ne pas laisser à charge des élèves le calcul de cette aire minimale qui fait appel à un raisonnement lié à la proportionnalité. On pourrait aussi choisir une loi avec comme densité 2 enfants pour 4 m^2, ce qui conserve la présence de la proportionnalité tout en simplifiant le travail qu'elle implique.

Le lecteur curieux pourra prochainement consulter le cahier de LS sur l'aire de baignade concernant cette fois des liaisons collège-lycée. Ce cahier, situé à d'autres niveaux d'enseignement sera plus orienté vers une réflexion autour du travail sur les fonctions (extrema, optimisation, variations) tout en incluant la dimension modélisation.

Remerciements

L'équipe de formation-recherche tient à remercier non seulement les acteurs de terrain investis dans cette lesson study (élèves, enseignants, Référents Mathématiques de Circonscription impliqués), mais aussi les acteurs de l'ombre sans qui ce type de formation n'aurait pas vu le jour, à savoir, particulièrement l'Inspection Éducation Nationale de la circonscription du Neubourg, l'équipe de direction administrative de l'école J.B. Bury de St Ouen de Thouberville et la mission mathématiques 27. Nous tenons à remercier les membres du laboratoire de

recherche André Revuz et du groupe « Activités » l'IREM de Rouen impliqués de près ou de loin dans cette formation.

Bibliographie

APMEP (2010), Activités mentales Automatismes au collège, Brochure n°10.

Azan, J.-L., Gilbert, L. & Krzewina N. (2019). TechMaths Première Sti2D, Nathan Technique Eds.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). Deal with modelling problems. *Mathematical modelling: Education, engineering and economics-ICTMA*, *12*, 222.

Chambris, C., Coulange, L., Rinaldi, A.M. & Train, G. (2021). Unités (relatives) pour les nombres et le calcul à l'école. Vers un état des lieux Potentialités », In Chaachoua H., Bessot, A. et al. (eds.) Perspectives en didactique des mathématiques : point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures, vol. 2, Éditions La pensée sauvage, Grenoble

Derouet, C. (2016). La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse. Étude de la conception et de la mise en œuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

Derouet, C. & Yvain-Prébiski, S. (à paraître). Vers la mathématisation de situations ancrées dans le réel : une proposition de grille d'analyse. In Pré-actes du 7e Symposium sur les Espaces de Travail Mathématique, Strasbourg, juin 2022.

Douady, R. & Perrin-Glorian, M.J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane, *Educational Studies in Mathematics*, *20*, 387-424.

Duponchel, D. & Bilas, M. (2012). Mathématiques, classe de 6ème, Collection Méthodes en pratiques, Scréren.

Duthil, S. & Masselin, B. (à paraître). L'aire de baignade, la modélisation au cœur d'une Lesson Study adaptée, *In COPIRELEM (Ed.)*, Pré-Actes du 48e colloque international des formateurs de professeurs des écoles, 2022, Toulouse.

Masselin, B. & Hartmann, F. (2020). Lesson Study adaptée : présentation d'une formation continue innovante. In COPIRELEM (Ed.), *Actes du 45e colloque international des formateurs de professeurs des écoles*, 2019, Lausanne (pp.518-527).

Hartmann, F. & Masselin, B. (2022). Cahier de LS « Garage », IREM de Rouen. https://irem.univ-rouen.fr/sites/irem.univrouen.fr/files/groupes/Activites/CahierLSGarageC.pdf

MENJS (2022a). *La résolution de problèmes mathématiques au collège, Les guides fondamentaux*. Éduscol, https://eduscol.education.fr/document/13132/download?attachment

MENJS (2022b). *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen, Les guides fondamentaux*. Éduscol, https://eduscol.education.fr/document/32206/download?attachment

Moreira Baltar, P. & Comiti, C. (1994). Difficultés rencontrées par des élèves de cinquième en ce qui concerne la dissociation aire/périmètre pour des rectangles, *Petit x, 34*, 5-29.

Verschaffel, L. & De Corte, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte, & J. Grégoire (dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* De Boeck, Bruxelles, 2008.

Yvain-Prébiski, S. (2021). Didactical adaptation of professional practice of modelling: a case study. In F.K.S. Leung, G.A. Stillman, G. Kaiser & K.L. Wong (Eds.), Mathematical Modelling Education in East and West. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. (pp. 305–319). Springer.

Yvain-Prébiski, S., & Masselin, B. (en cours). La modélisation à partir d'une situation extra-mathématique : de la formation des enseignants à la mise en œuvre, dans le cadre du dispositif Lesson Study adapté au contexte français. Repères-IREM.

Les essentielles ERMEL, CP, 15 situations pour l'apprentissage de la numération et du calcul, (2017). Éditions Hatier

Les essentielles ERMEL, CE1,15 situations pour l'apprentissage de la numération et du calcul, (2017). Éditions Hatier

Sitographie
https://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article802 (Curvica)
https://www.pedagogie.ac-aix-marseille.fr/jcms/c_122424/fr/le-jardinier-et-les-chats
https://pedagogie.ac-reims.fr/images/stories/mathematiques/id1755/Aire_Antarctique_fiche_eleve.pdf

Annexes

Annexe 1 Solutions expertes

Voici les solutions apportées par le groupe de RMC :

Pour 120 enfants, l'aire minimale nécessaire pour respecter la loi est de $80m^2$. Partant de ce fait, on cherche s'il existe des zones dont l'aire est supérieure à $80m^2$. La question de leur réalisation effective est mise de côté pour l'instant.

Zone circulaire fermée

25m Soit R le rayon de cette zone. On a $2 \times \pi \times R = 25m$ d'où R ≈ $3{,}98m$. On en déduit l'aire de la zone circulaire :

A = $\pi \times R^2$

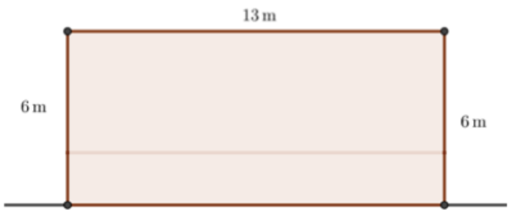
A ≈ $\pi \times (3{,}98m)^2$

A ≈ $49{,}76m^2$ Cette solution ne permet pas de respecter la loi.

Par zone, nous entendons maintenant zone délimitée par une « courbe adossée à une droite ». Nous ne nous intéressons plus aux courbes fermées qui donneront une aire inférieure à celles de même nature adossées à une droite.

Zones rectangulaires

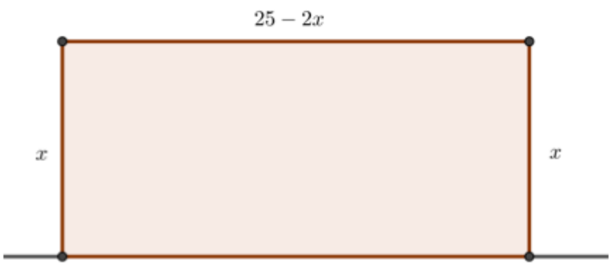
En tâtonnant, nous ne trouvons pas de rectangle dont l'aire dépasse $80m^2$. Par exemple, la zone rectangulaire suivante offre une aire de seulement $78m^2$.



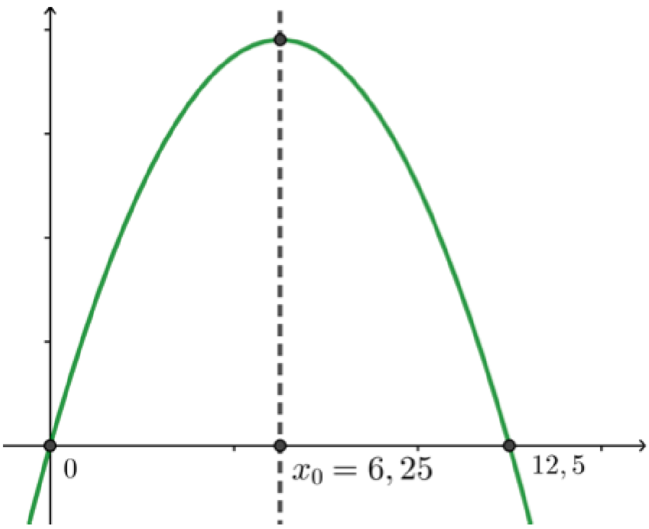
La ligne d'eau a pour longueur $2 \times 6m + 13m = 25m$ et l'aire de la zone est alors $6m \times 13m = 78m^2$.

D'autres recherches plus poussées ne donnent pas d'aire supérieure ou égale à $80m^2$.
On peut alors se demander quelle aire maximale est atteinte si l'on considère des zones rectangulaires ? Dépasse-t-elle $80m^2$? Bref, comment varie cette aire ?

Pour étudier la façon dont varie l'aire des zones rectangulaires selon leurs dimensions, on peut considérer la fonction :
f définie par $f(x) = x(25 - 2x)$ qui donne, pour $x \in [0; 12{,}5]$, l'aire de la zone ci-dessous.



On a $f(x) = 25x - 2x^2$. Cette fonction est un trinôme du second degré que l'on peut définir sur l'ensemble des réels tout entier. On sait de plus que f s'annule pour $x = 0$ et $x = 12{,}5$.
La courbe représentative de f est une parabole tournée vers le bas et ses propriétés de symétrie permettent de dire qu'elle admet un sommet qui est un maximum en $x_0 = \frac{0+12{,}5}{2} = 6{,}25$.



La zone rectangulaire qui admet la plus grande aire est celle de profondeur $6{,}25m$ et de largeur $12{,}5m$ et son aire est de $6{,}25m \times 12{,}5m = 78{,}125m^2$.
On ne pourra donc pas respecter la loi avec une zone rectangulaire.

Zone semi-circulaire

Soit R le rayon de cette zone. On a $\pi \times R = 25m$ soit R= $\frac{25m}{\pi}$. On en déduit l'aire de la zone circulaire :

$$A = \frac{1}{2} \times \pi \times R^2$$

$$A = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{25m}{\pi}\right)^2$$

$$A = \frac{1}{2} \times \pi \times \frac{625}{\pi^2} m^2$$

$$A = \frac{312{,}5}{\pi} m^2$$

Une calculatrice de poche donne A ≈ $99m^2$ soit une aire supérieure à celle souhaitée.

La zone semi-circulaire permettrait de respecter la loi mais la question de la réalisation effective d'une telle zone peut être posée...

Autres zones polygonales

Nous n'avons pas pris le temps de regarder d'autres formes géométriques. Cet élargissement de point de vue permet de retrouver le résultat sur la zone rectangulaire optimale, elle permet aussi de traiter les zones du type triangle ou trapèze isocèle qui ont été évoquées comme indiqué dans la partie suivante.

Creuser le sujet, aire de baignade

Comment expliquer que parmi toutes les surfaces envisageables, c'est le demi-cercle qui offre l'aire la plus grande ? De même, comment expliquer que le rectangle qui a la plus grande aire est celui dont la longueur est le double de la largeur ? Et dans le cas d'une zone de baignade triangulaire, ou trapézoïdale ?...

Il existe un problème se rapprochant de celui de la zone de baignade, connu depuis l'antiquité sous le nom de problème de Didon : « A périmètre fixé, quelle est la figure qui offre la plus grande aire ? ». La proposition 1 est un résultat[1] qui est loin d'être simple à prouver.

Proposition 1 : *De toutes les courbes fermées, sans point double, de longueur donnée, celle qui entoure l'aire la plus grande est le cercle.*

On voit déjà que **ce sont les conditions sur la nature de la courbe qui déterminent la forme optimale** (ce qui aura un retentissement en classe). Les conditions de cette proposition 1 (en particulier, une courbe fermée) ne sont pas celles de la zone de baignade puisque celle-ci reste ouverte sur un côté. La proposition 1 permet néanmoins de montrer que c'est le demi-cercle qui offre la plus grande aire dans ces conditions. Un argument de symétrie permet de s'en convaincre. En effet, si on avait une aire supérieure à celle du demi-cercle, par symétrie par rapport à *d*, on obtiendrait une aire supérieure à celle du cercle, celle-ci ayant, par symétrie, le même périmètre que le cercle. Ce qui est absurde d'après la proposition 1.

Dans le cas des polygones, les propositions 1 et 2 ci-dessous permettent de résoudre le cas des zones de baignades polygonales adossées à une droite dont les zones triangulaires, rectangulaires et trapézoïdales font partie.

Proposition 2 : *Parmi tous les polygones de même périmètre ayant le même nombre de côtés, c'est le polygone régulier qui offre la plus grande aire.*

Proposition 3 : *Entre deux polygones réguliers ayant même périmètre, celui qui offre la plus grande aire est celui qui a le plus de côtés.*

En utilisant l'argument de symétrie, on remarque qu'il y a deux triangles (fig.1) qui concourent à l'aire maximale. Il suffit alors d'invoquer la proposition 2 pour obtenir le triangle isocèle-rectangle comme zone triangulaire d'aire maximale.

Fig. 1: Deux triangles possibles

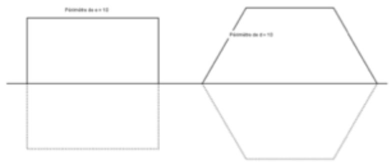


Fig. 2: Le rectangle et un trapèze

Un même principe s'applique dans le cas de la zone rectangulaire et on voit que celle-ci fait partie des figures formées de trois côtés adossés à une droite mais alors on s'aperçoit que ce n'est pas le rectangle qui admet la plus grande aire mais un trapèze particulier, le demi-hexagone (régulier). En passant, la proposition 1 prouve que le rectangle d'aire maximale est celui qui, par symétrie donne un carré et ceci explique pourquoi l'aire maximale est obtenue lorsque la longueur de la zone est le double de la profondeur.

La proposition 4 offre une généralisation pour les surfaces polygonales adossées à une droite.

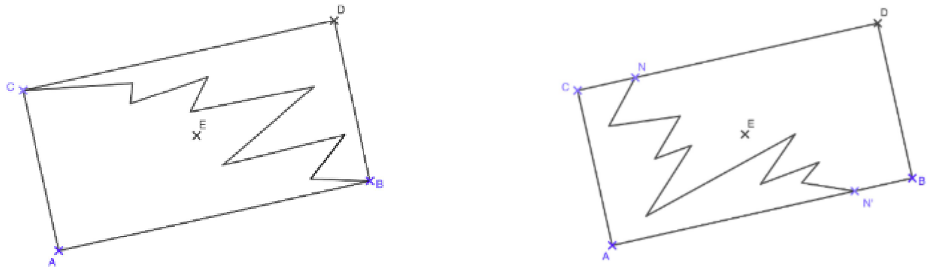
Proposition 4 : *Pour une longueur donnée, la zone polygonales adossée à une droite à n côtés qui a la plus grande aire est le demi-polygone à 2n côtés, celui construit à partir d'une de ses diagonales.*

1Le lecteur intéressé pourra chercher des éléments de preuve des propositions 1, 2 et 3, nous ne le ferons pas ici.

Annexe 2 Situations mêlant aire et périmètre

Situation 1

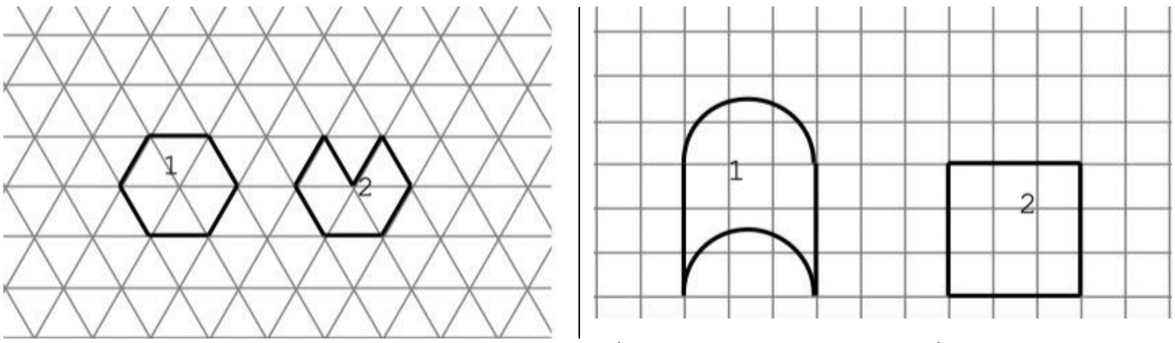
Comment découper une feuille A4 en deux parties de même périmètre et d'aire différente ?



N et N'sont symétriques par rapport au point E

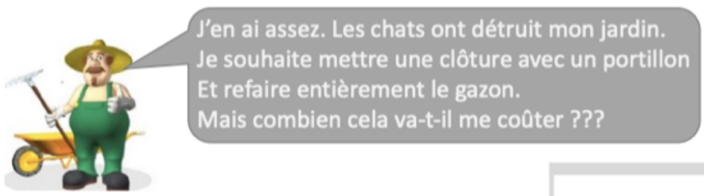
Situation 2

Comparer les aires et périmètres des figures 1 et 2.



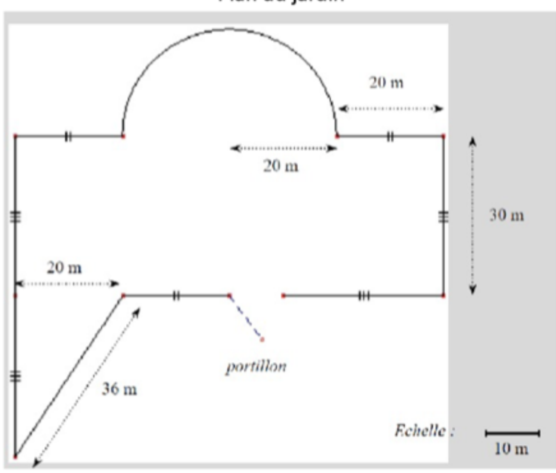
Extrait brochure n°10, APMEP (2010), Activités mentales Automatismes au collège.

Situation 3



<u>Consigne :</u>
Tu dois aider ce jardinier à avoir une estimation très précise du prix pour refaire son gazon et mettre une clôture.

Plan du jardin



https://www.pedagogie.ac-aix-marseille.fr/jcms/c_122424/fr/le-jardinier-et-les-chats

Annexe 3 Des pistes pour une progression sur le concept d'aire.

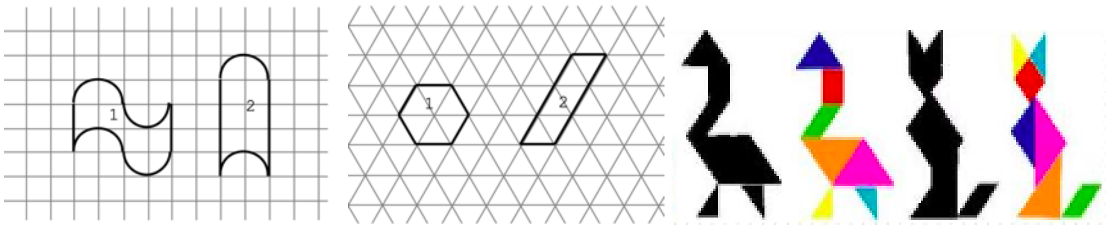
Un premier travail par superposition est une étape qui vise à donner du sens à la grandeur « aire ».

- *Comparaison simple*

Le cas de comparaison le plus accessible est celui où une des deux surfaces considérées peut être entièrement contenue dans l'autre.

Exemple de comparaison simple

- *Comparaison indirecte d'aires*
  Comparer les aires de deux surfaces dont le contour de l'une dépasse celui de l'autre sans la recouvrir entièrement est plus difficile car la comparaison précédente est inopérante. Il s'agit d'envisager d'autres procédures comme un découpage, une recomposition ou l'introduction d'un maillage (qui peut être quadrillé mais pas que.)



Exemples de comparaison indirecte

- *Distinction aire et surface*
  Concevoir différentes surfaces de même aire est à travailler. L'aire de baignade peut être un appui pour élaborer différentes surfaces d'aire $2m^2$ (rectangle d'$1m$ sur $2m$, ou encore de $0{,}5m$ sur $4m$, triangle isocèle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent $2m$, …)

- *Constitution d'une échelle de référence.*

Matérialiser une surface d'un mètre carré dans la classe, estimer l'aire d'un timbre-poste, de la salle de classe ou encore de la cour de récréation sont autant de situations qui permettront d'installer une échelle de référence.

- *Un travail en lien avec différents types de nombres*

Certaines situations permettront aux élèves de mobiliser des nombres autres qu'entiers comme les fractions ou nombres décimaux non entiers.

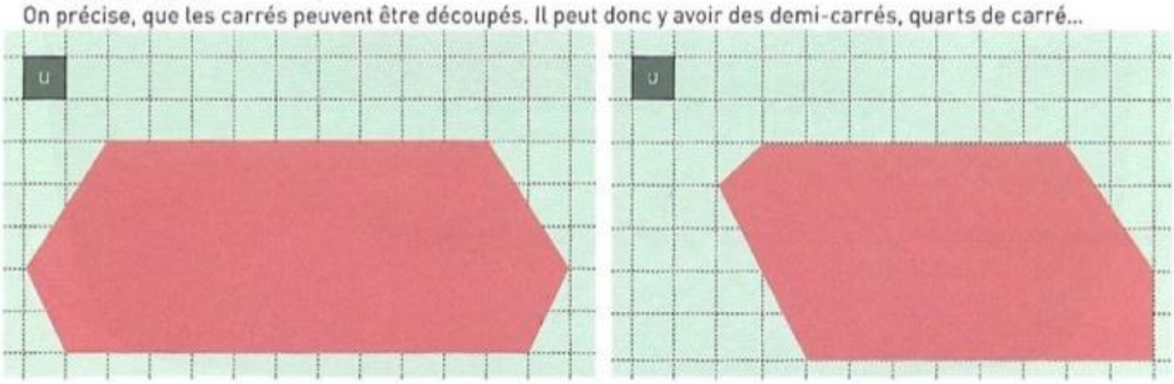
Voici quelques situations autour des aires

Polygones rouges.

Première partie

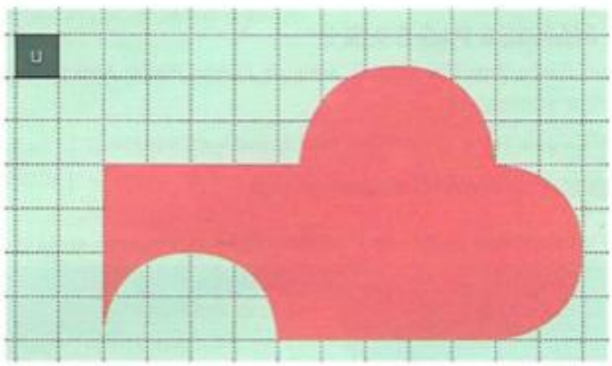
Dans chacun des deux cas suivants, trouver par la méthode de son choix, le nombre de carrés u que peut contenir le polygone rouge.

On précise, que les carrés peuvent être découpés. Il peut donc y avoir des demi-carrés, quarts de carré...



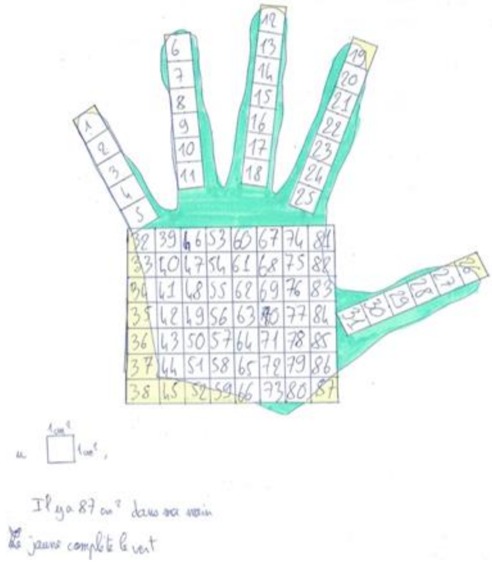
Deuxième partie

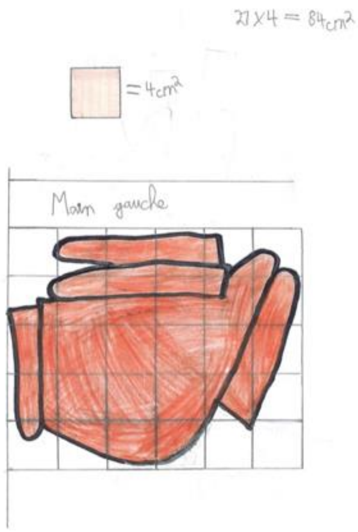
Estimer par la méthode de son choix, le nombre de carrés u que peut contenir cette figure.

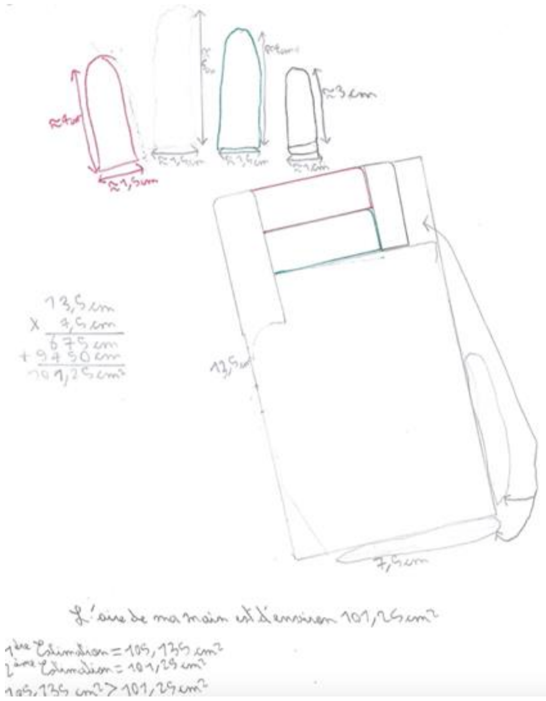
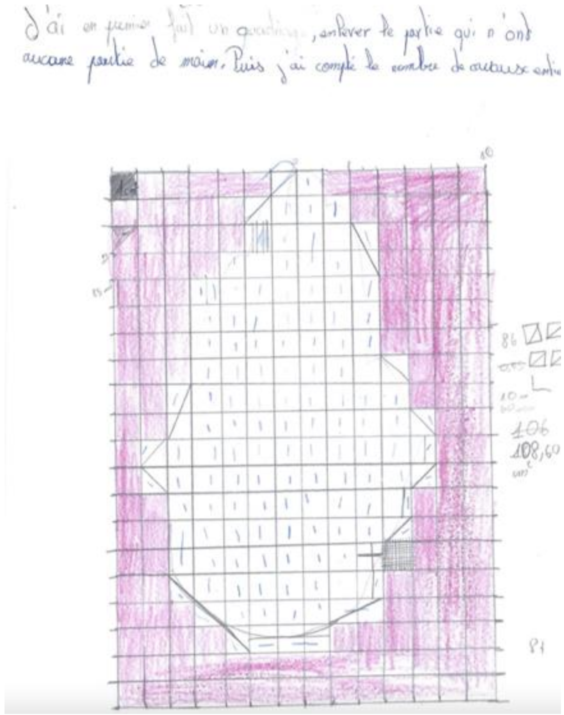
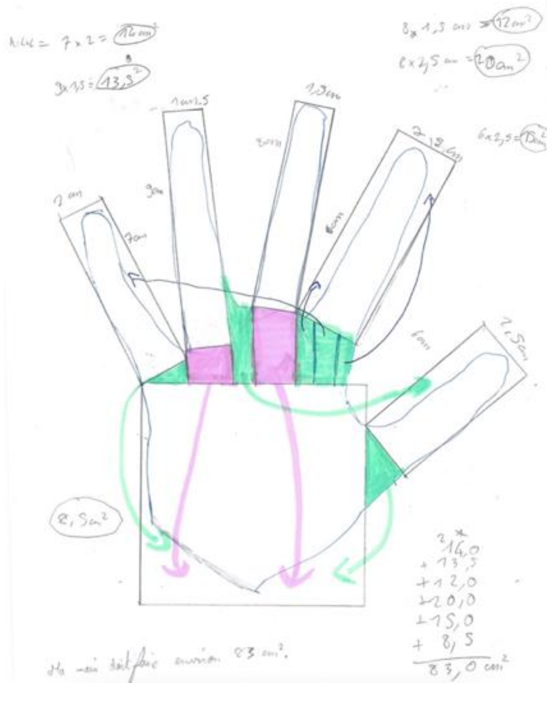
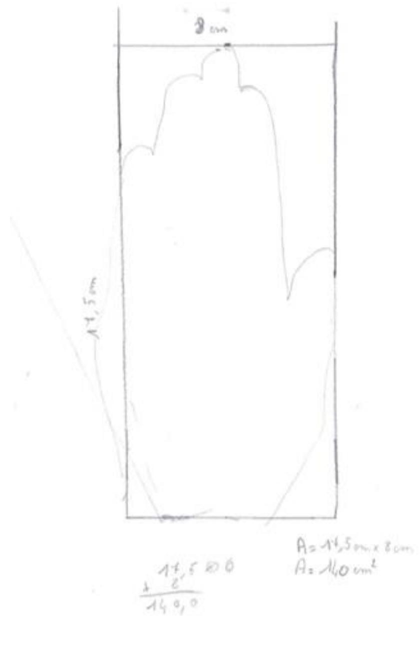


Duponchel, D. & Bilas, M. (2012), Mathématiques, classe de 6ème, Méthodes en pratiques, Screren

Estimer l'aire de sa main.





13,5 cm x 7,5 cm 675 cm + 9450 cm 101,25 cm² L'aire de ma main est d'environ 101,25 cm² 1ère Estimation = 105,135 cm² 2ème Estimation = 101,25 cm² 105,135 cm² > 101,25 cm²	J'ai en premier fait un quadrillage, enlever le partie qui n'ont aucune partie de main. Puis j'ai compté le nombre de carreaux entie 108,60
8,5 cm² 83,0 cm² Ma main fait environ 83 cm².	8 cm 17,5 cm A= 17,5 cm x 8 cm A= 140 cm²

Estimez l'aire de l'Antarctique

https://pedagogie.ac-reims.fr/images/stories/mathematiques/id1755/Aire_Antarctique_fiche_eleve.pdf

Annexe 4 Les « Karédo » de E. Minot

Séance 1 (lundi) Résolution de problème dans une situation de proportionnalité

Phase 1 (salle de motricité) : l'enseignant présente un carré de 1m de côté découpé dans de la toile cirée bleue et interroge les élèves : " Qu'est-ce que c'est ?" Réponses des élèves : "C'est une feuille bleue, c'est un carré ".

Enseignant :" Perdu ! C'est un Karédo ! C'est magique ! On le pose par terre, on saute dedans et on peut nager. (démonstration). Tu veux essayer ?"

Plusieurs élèves essaient sans contrainte.

Enseignant : "À votre avis, combien d'élèves peuvent nager en même temps dans un karédo ? On essaie ? Les élèves se placent un par un dans le karédo jusqu'à atteindre l'effectif complet de 12 CP (classe dédoublée).

On considère généralement que 10 adultes peuvent tenir dans 1m² mais les CP prennent moins de place.

Enseignant : "Est-ce que vous avez assez de place pour nager ? Pas vraiment ! Alors, on va dire que pour être à l'aise pour nager, on va mettre 3 élèves maximum dans 2 karédos (démonstration avec matériel).

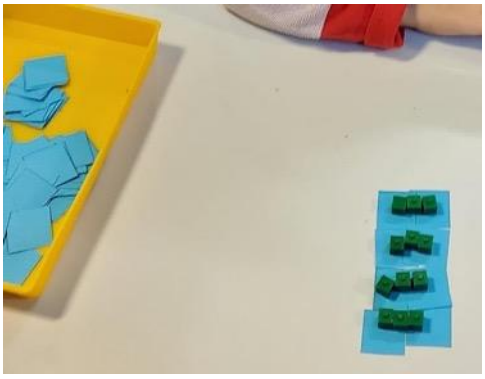
Enseignant : "À votre avis, combien il faut de karédos pour que tous les élèves de la classe se baignent en même temps ?

Les réponses spontanées sont variées et relèvent pour certaines plus du hasard que de la réflexion. Une phase de recherche est nécessaire.

Phase 2 (retour en classe) :

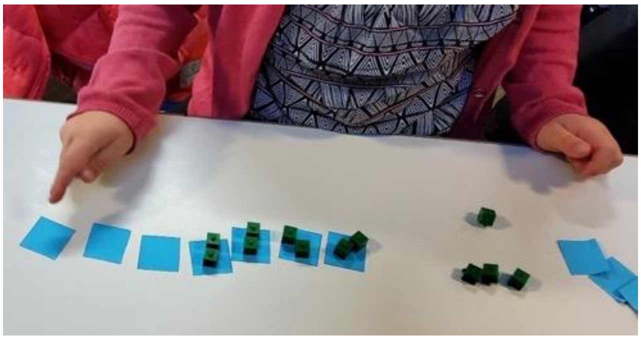
Enseignant : "Pour vous aider à réfléchir, je vais vous donner des mini karédos (carrés bleus de 3cm de côté) et 12 cubes qui représentent les 12 élèves. Je répète la question : combien il faut de karédos pour que tous les élèves de la classe se baignent en même temps ? "

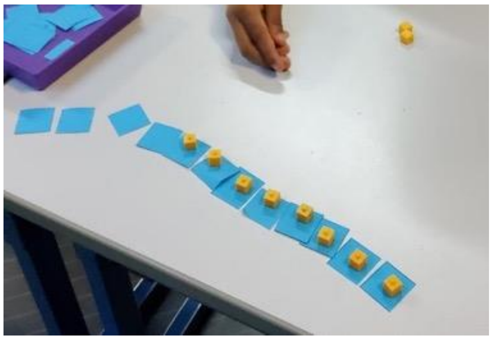
Phase de recherche individuelle. Le choix a été fait de fournir le matériel à chaque élève pour éviter les conflits de possession. Toutefois, la collaboration entre voisins est possible.



Phase 3 : mise en commun

Le rapport trois élèves pour deux karédos constitue un obstacle pour de nombreux élèves qui représentent la situation avec un rapport deux élèves pour un karédo ou un élève pour un karédo. Il est nécessaire d'intervenir individuellement auprès de ces élèves pour leur rappeler la consigne et leur permettre de représenter la situation correctement. Cet étayage permet à tous les élèves de trouver la solution, 8 karédos.





Phase 4 : : Enseignant : "Nos 8 karédos, ça nous fait une mini piscine. Quelle forme pourrait-on lui donner à cette piscine ? " Recherche individuelle sur feuille blanche (assemblage de 8 karédos).

Phase 5 : (en regroupement) mise en commun et présentation des assemblages trouvés (essentiellement des rectangles).

Le rectangle 2x4 est bien identifié en tant que « rectangle ». En revanche, le rectangle 1x8 est spontanément associé au mot « bâton ». Il est difficile pour les élèves de considérer que c'est aussi un rectangle. C'est l'occasion de revenir sur les premières propriétés du rectangle.

Séance 2 (mardi)

Réactivation de la séance 1

Phase 1 : évocation de la situation précédente, dévolution du nouveau problème.

Enseignant : "Vous vous souvenez de nos mini piscines ? Comment les a-t-on construites ? Pourquoi ?" Réponse des élèves : "Parce qu'on est 12 et qu'il faut 2 karédos pour 3 élèves !"

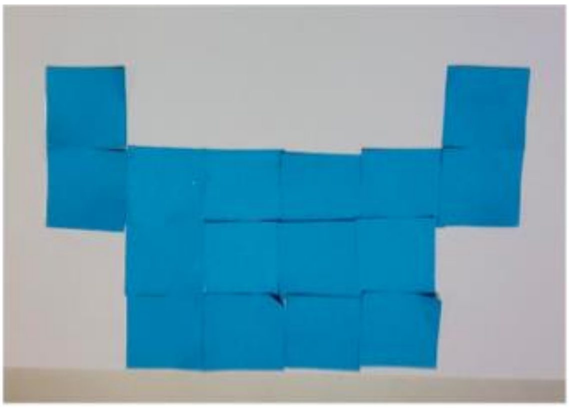
Enseignant : "Oui, mais, à la piscine, quand on va y aller au mois de janvier, on ira avec les CE1 de Mme G. Du coup, nos piscines sont trop petites pour nous tous ! Combien de karédos il faut rajouter pour les CE1 ? Pour vous aider à réfléchir, je vais vous redonner les mini karédos (carrés bleus de 3cm de côté) et les cubes (12 cubes par élève). Je répète la question : combien il faut de karédos pour que tous les élèves de la classe de CP et de la classe de CE1 se baignent en même temps ? "

Phase de recherche en binômes. Les élèves disposent du même matériel qu'à la séance précédente mais ils doivent le mettre en commun pour réussir.

Phase 2 : Mise en commun
Enseignant : "Elle fera combien de karédos alors notre nouvelle piscine ?" La situation de la veille est réinvestie par tous les élèves. Ils arrivent facilement à la conclusion : " Les CE1 sont 12 comme nous donc il faut rajouter 8 karédos ! Il faut 16 karédos ! "

Phase 3 :
Enseignant :" Je vous donne donc 16 karédos chacun et vous allez trouver les formes qu'on peut donner à notre nouvelle piscine." Recherche individuelle sur feuille blanche. Pour cet assemblage de 16 karédos, une nouvelle consigne est donnée pour anticiper le calcul de périmètre à venir : chaque karédo doit avoir au moins un côté commun avec un autre karédo.

Phase 4 :
Mise en commun en regroupement, présentation des assemblages trouvés : rectangles 1x16 et 2x8, carré 4x4, et autres. Les élèves sont invités à vérifier que les consignes ont été respectées (nombre de karédos et côtés communs).

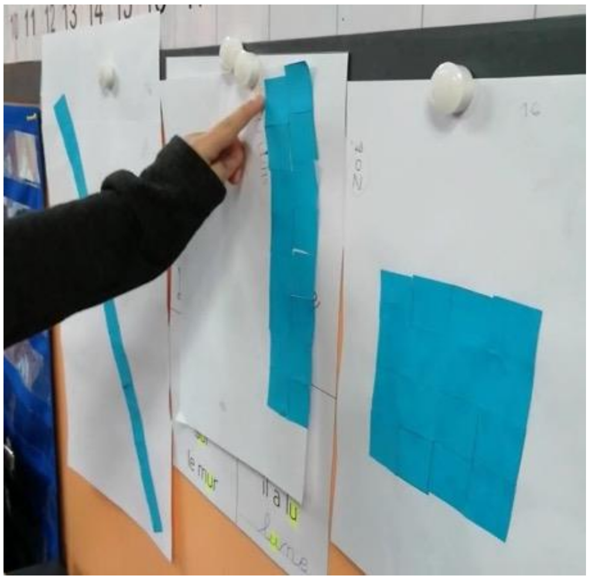
Conclusion : on a trouvé un carré, deux rectangles (le rectangle 1x16 n’a pas été trouvé par les élèves mais apporté par l’enseignant) et beaucoup d’autres formes pour notre piscine. Mais toutes nos piscines ont été faites avec 16 karédos (ces différents assemblages vont nous permettre de calculer des périmètres différents à aire constante).

Séance 3 (jeudi)

Introduction de la notion de périmètre

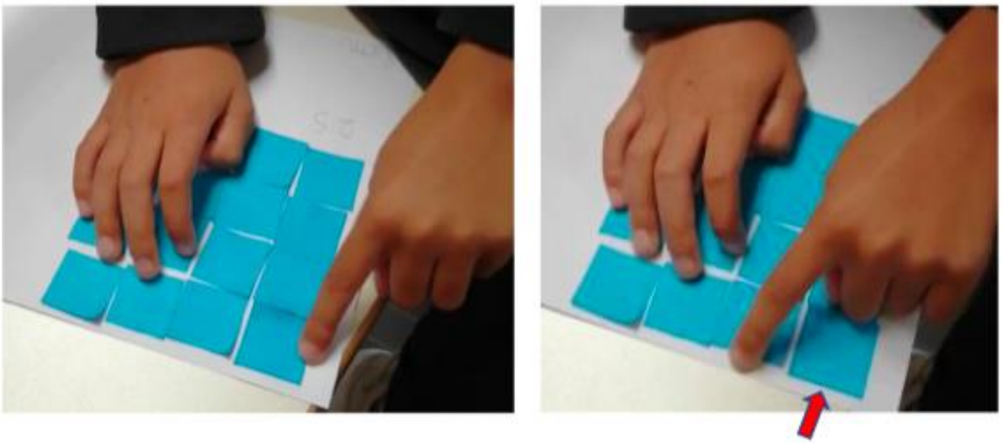
Phase 1 : dévolution du problème en regroupement. Les productions de la séance précédente sont affichées.

Enseignant : "Vous vous souvenez de nos mini piscines ? Elles sont toutes faites avec 16 karédos. Je voudrais savoir quelle piscine est la plus facile à surveiller." Les élèves verbalisent leurs propositions. Étayage : « Que fait le maître-nageur quand il surveille la piscine ? Il reste sur la chaise haute ou il fait le tour du bassin. » Enseignant : « Voici 3 piscines (affichage). À votre avis, de quelle piscine on fait le tour le plus vite ? » (On suppose que le déplacement se fait à vitesse constante). Les élèves oralisent leurs réponses, ils sont invités à justifier. Intuitivement, certains élèves perçoivent et verbalisent qu’il faudra plus de temps pour faire le tour du rectangle 1x16 que le tour du carré 4x4. Mais une incertitude persiste entre le carré et le rectangle 2x8, d’où la nécessité d’introduire une mesure : « Comment pourrait-on faire pour mesurer le tour de la piscine ? »



Phase 2 : Recherche individuelle du périmètre (le terme n’est pas introduit à ce stade) de la piscine construite à la séance précédente.

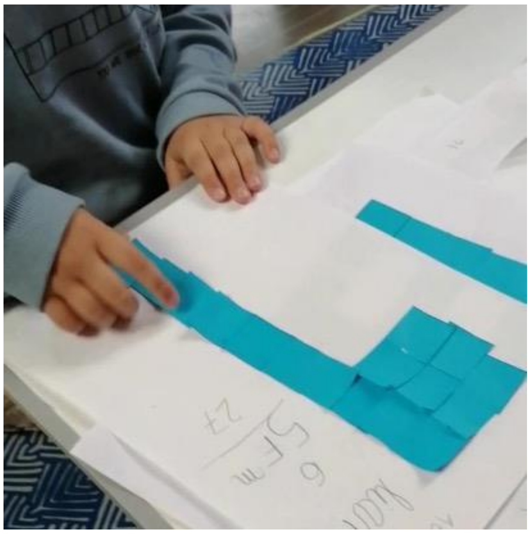
Une grande majorité des élèves dénombrent les carrés plutôt que les côtés, ce qui pose problème quand un carré forme un sommet de l’assemblage. Il n’est alors compté qu’une seule fois. Un étayage s’avère nécessaire. Je choisis de mettre en place le calcul du périmètre d’un karédo réel (matériel de la première séance).



Le côté indiqué par la flèche n'est pas compté.

Phase 3 : Étayage collectif par calcul du périmètre d'un karédo de la séance 1 (grand format). Chaque côté est mesuré puis la somme des 4 longueurs est calculée.

Phase 4 : 2ème phase de recherche individuelle. Les élèves viennent justifier leur réponse individuellement auprès de l'enseignant ce qui permet d'observer les procédures mises en œuvre.



Phase 5 (en regroupement) Mise en commun des procédures, affichage des piscines avec leur périmètre

Rectangle 1×16	34m	« C'est le plus long »
Rectangle 2×8	20m	
Carré 4×4	16m	« C'est le plus court »

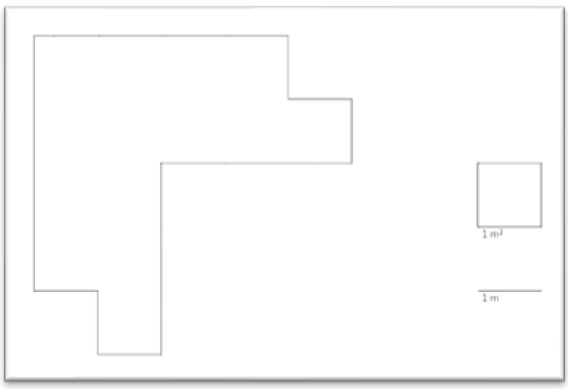
Ces affichages mettent en évidence que la piscine carrée est la plus facile à surveiller car le tour est plus court. L'incertitude sur le rectangle 2x8 est levée.

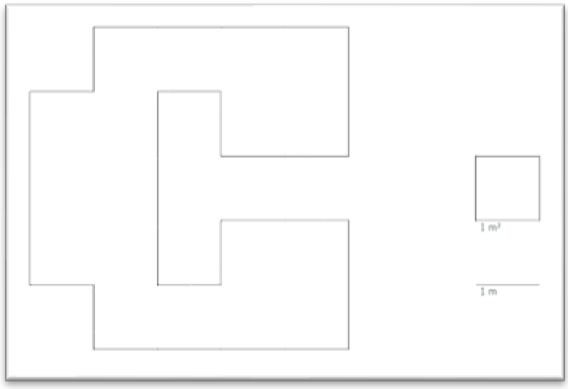
Conclusion de la séance : toutes les piscines ont été construites avec 16 karédos (aire =16 m²) mais c'est la piscine carrée qui est la plus facile à surveiller.

Conclusion de la séquence : " En réalité, un karédo s’appelle un mètre-carré. Donc toutes nos piscines mesurent 16 mètres-carrés mais elles ont toutes un contour de longueur différente. "

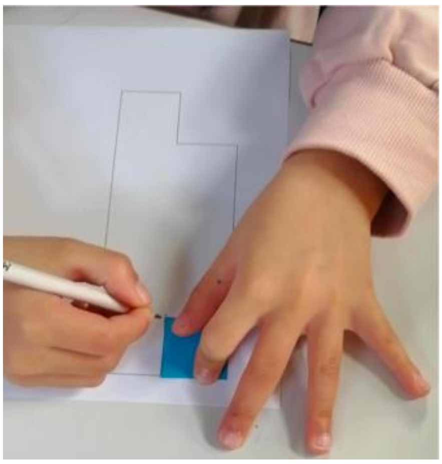
Évaluation formative

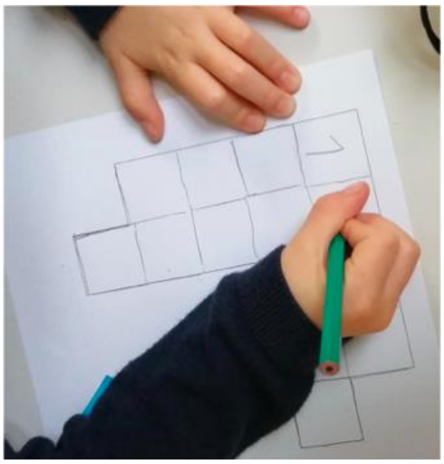
Quatre supports différents représentant des piscines sont proposées (deux exemples sont présentés ci-dessous). Il s’agit d’en déterminer l’aire et le périmètre.





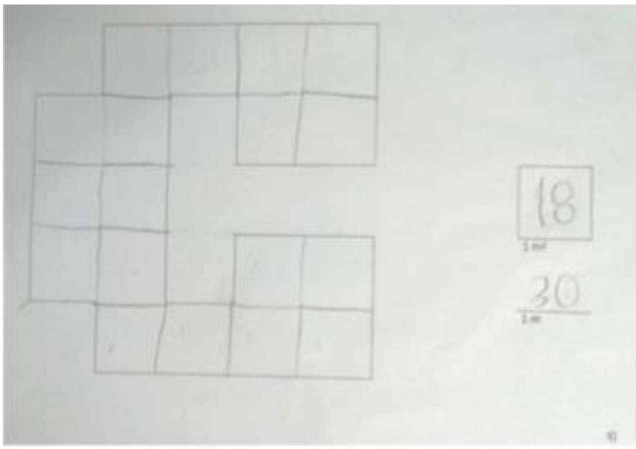
La consigne est la suivante : " combien de mètres-carrés mesure cette piscine ? " Mais il est nécessaire de reformuler pour certains : " combien de karédos peux-tu mettre dans cette piscine ? " C’est l’occasion pour les élèves de mesurer une aire par pavage.

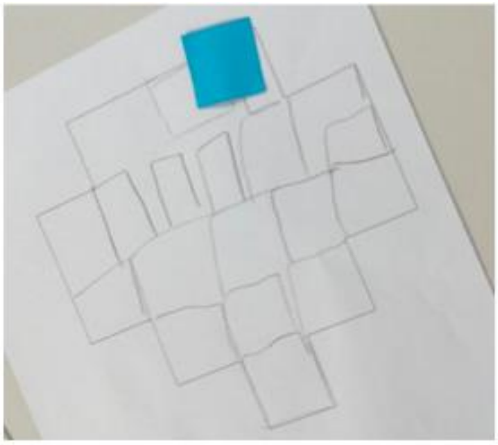




Les compétences des élèves dans ce domaine sont diverses. Si certains sont capables de réaliser un pavage correct sans gabarit…

… d’autres éprouvent des difficultés à réaliser un pavage régulier.





Concernant les calculs de périmètre et d’aire, la présence de 4 supports différents permet de s’assurer que les élèves proches ne sont pas tentés de regarder les résultats des voisins. Ils s’engagent donc seuls dans la procédure de résolution. Après correction par l’enseignant, une remédiation ou un étayage est proposé aux élèves qui n’ont pas réussi. Ils peuvent ensuite recommencer l’évaluation avec un des 3 autres supports jusqu’à ce qu’ils réussissent.

Même si les résultats des élèves sont encourageants, on ne peut pas affirmer que les notions d’aire et de périmètre sont acquises. Cette séquence constitue une première approche qui sera complétée et consolidée au fil des années. Toutefois, au regard de mon questionnement initial, je considère que les élèves dès le CP sont capables d’appréhender la différence entre aire et périmètre dès lors que ces grandeurs sont introduites de manière pragmatique. De plus, cette séquence qui est facile à mettre en place permet de mobiliser de nombreuses compétences mathématiques dans le cadre de la résolution de problèmes.