Situation « Casseroles »

Mots clés : aire, extremum, optimisation, fonction, grandeurs liées, modélisation, variation, volume, vie quotidienne.

Énoncé :

Les casseroles

Une entreprise doit fabriquer un grand nombre de casseroles ayant un volume de 1 L.

Un premier modèle est envisagé avec les caractéristiques suivantes:

- le rayon du fond de la casserole est de 7 cm.

- la hauteur de la casserole est de 6,5 cm.

L'un des employés prétend qu'en modifiant les dimensions, il est possible de conserver le volume de 1 L en utilisant moins de matière.

A-t-il raison ?

Niveau : 2nde mais envisageable dès la 4^{e}

Objectifs :

- Faire travailler les élèves sur la modélisation mathématique d'une situation réelle
- En calcul littéral : exprimer en fonction de...
- Notion de fonction : tableau de variation, représentation de fonction, recherche d'extremum
- Utilisation des TICE : tableur, calculatrice et GeoGebra

Intentions :

Inciter les élèves à formuler des hypothèses de modélisation et à élaborer un modèle qui mobilise l'outil fonction pour résoudre un problème d'optimisation.

Scénario possible :

Il est important de laisser les élèves prendre conscience que l'aire sera la grandeur à considérer pour minimiser la quantité de métal. Bien sûr, une plénière pourra venir s'insérer dans le scénario suivant pour faire avancer toute la classe sur ce point.

Phase 1 (10 min) :

Distribution de l'énoncé et d'un brouillon (feuille blanche).
Individuellement, les élèves lisent l'énoncé puis commencent leur recherche.
Ils ont la possibilité d'utiliser les calculatrices.

Phase 2 (35 min) :

Travail en groupe avec production finale sur une feuille synthèse.

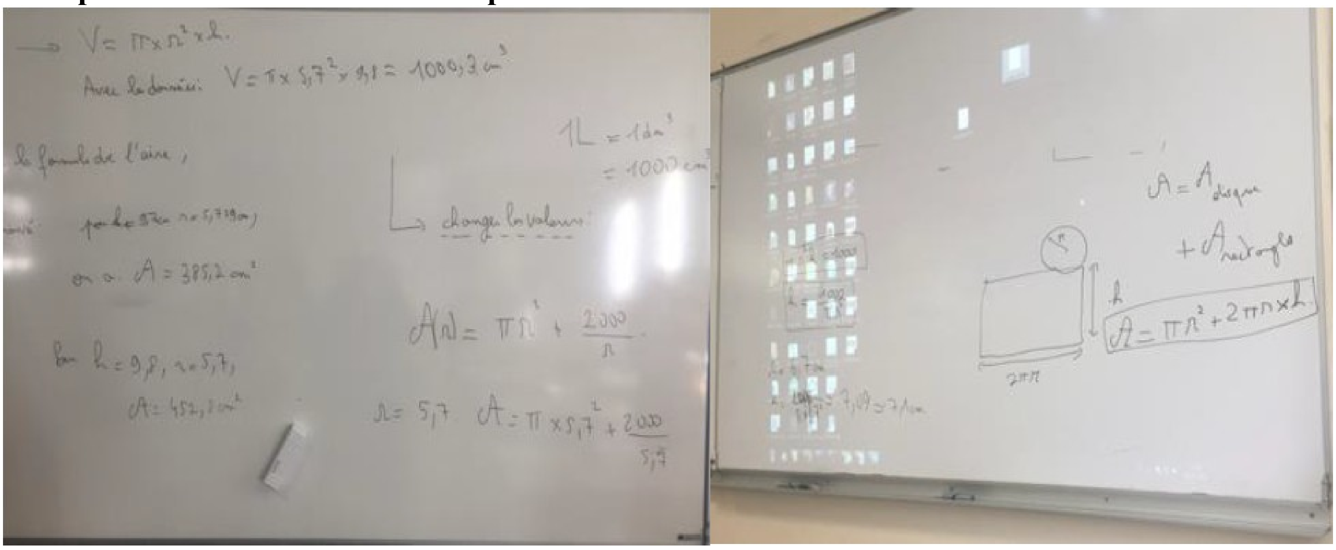
Phase 3 : Bilan et institutionnalisation (sur une autre heure de cours)

L’enseignant pourra, durant ces phases, utiliser des relances :

Déclencheur d’intervention	Interventions	Effets attendus, buts
Les élèves se posent la question de l’épaisseur du fond et de la paroi.	On néglige l’épaisseur (c’est un choix de modélisation) : on considère qu’elle n’a que peu d’incidence sur la résolution du problème.	Travailler sur un même modèle mathématique simplifié.
Difficultés liées au fait que les arrondis du rayon et de la hauteur ne donnent pas un volume de 1 litre exactement.	Proposer une conversion en litre pour montrer que la différence est inférieure à 1 mL.	Faire dépasser l’obstacle des arrondis.
Difficulté à faire le lien entre la quantité de métal et l’aire associée.	Faire manipuler avec un patron. Prévoir du matériel (solides et patrons).	Prendre conscience sue l’aire permettra de modéliser la quantité de métal.
L’élève exprime l’aire en fonction des deux variables *r* et *h*.	Faire des essais numériques pour trouver la relation entre *r* et *h*, puis exprimer *r* en fonction de *h*.	Obtenir une fonction à une seule variable (*r*).

Extrait de la grille d’intervention de l’enseignant (cahier de LS « Casserole »).

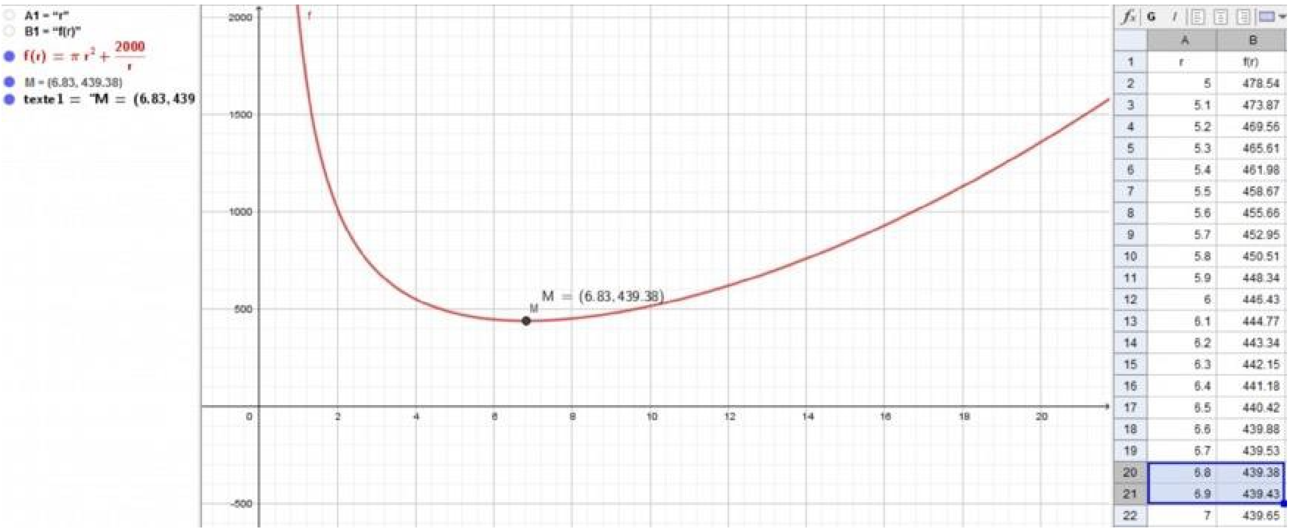
Exemple de tableau avec démarche possible :



Pistes d’institutionnalisation :

L’institutionnalisation pourra porter sur la notion de minimum d’une fonction (ici une aire) et de la valeur de la variable pour laquelle il est atteint. Elle pourra aussi porter sur l’existence de choix de modélisation et des écarts qu’ils peuvent entraîner par rapport à la situation réelle.

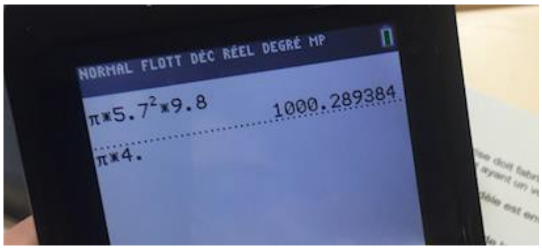
On note h la hauteur en cm de la casserole de forme cylindrique et r le rayon en cm de la base.
Le volume de la casserole $V = \pi \times r^2 \times h$ cm³
On sait que $V = 1L = 1000$ cm³ $= \pi \times r^2 \times h$ cm³.
Donc on peut exprimer h en fonction de r : $h = \frac{1000}{\pi \times r^2}$.
Aire totale du cylindre = Aire de la base + Aire latérale
Aire totale du cylindre $= \pi \times r^2 + 2\pi \times r \times h = \pi \times r^2 + 2\pi \times r \times \frac{1000}{\pi \times r^2} = \pi \times r^2 + \frac{2000}{r}$
On note la fonction $f : r \to \pi \times r^2 + \frac{2000}{r}$ définie sur $]0\,;+\infty[$
On cherche la valeur de r qui rend l'aire totale minimale.
Avec géogebra, on obtient sur]0 ;20] la courbe de f.



Le minimum de f sur]0 ;20] est obtenu pour r ≈ 6,8 cm au dixième près.

Productions d'élèves :

Un premier groupe. Le groupe passe beaucoup de temps sur des calculs de volume. La première formule est fausse $V = 2\pi rh$. L'intervention de l'enseignant a été d'indiquer que $2\pi r$ est le périmètre et non l'aire du disque de rayon r.



Un deuxième groupe. Le groupe ne réalise pas de production finale. Cependant, sa procédure est originale et mérite d'être relatée. Partant de la contrainte du volume de 1 L, les élèves font une première division : 1000:8 = 125, puis recherchent un rayon r pour la hauteur h = 8 cm en divisant 125 par π puis en considérant la racine carrée du résultat. Une élève dit qu'il faut diviser par π et prendre la racine carrée et un autre élève propose alors d'écrire l'équation suivante : $125 = \pi \times r^2$. S'en suit une erreur de traitement algébrique : $\frac{\pi}{125} = r^2$. Puis ils écrivent $\sqrt{\frac{\pi}{125}} = \sqrt{r^2}$. Ils abandonnent ensuite l'équation et partent sur des essais de couples (r, h) qui les font s'éloigner temporairement de la contrainte 1 L. Ceci montre une tentative d'utilisation spontanée de la méthode algébrique qui mérite d'être évoquée lors du bilan.

A d’autres niveaux :
Au cycle 4, les élèves pourront par exemple fabriquer des patrons correspondant à des casseroles de 1 L afin de calculer leur aire.

Les connaissances mises en jeu sont alors :

- Conversions (cm^2, cm^3, dm^3, 1 L = 1 dm^3)
- Volume du cylindre
- Surface latérale du cylindre
- Formule du disque (surface du fond de la casserole)
- Notion de fonction : modélisation, représentation graphique, calcul littéral, statut de la lettre, tableau de valeurs, utilisation du tableur.