

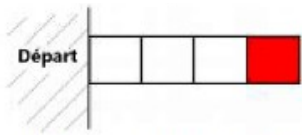
Situation « Lièvre et tortue »

Mots clés : modélisation, simulation, fréquences, probabilités


Énoncé :

« Le jeu du lièvre et de la tortue »

Une course se passe entre un lièvre et une tortue.



Départ



On dispose du parcours suivant :

On lance un dé équilibré à six faces.

Si le 6 sort, le lièvre gagne, sinon la tortue avance d'une case.

La tortue gagne quand elle arrive sur la 4^{ème} case.

Qui a le plus de chances de gagner ?

Niveau : Troisième (envisageable au lycée)

Objectifs : Résoudre un problème en estimant des probabilités à l'aide de fréquences (le calcul des probabilités peut s'envisager sur certains niveaux supérieurs au lycée)

Intentions : Inciter les élèves à utiliser l'approche fréquentiste via des simulations de courses avec Scratch, ou avec le tableur.

Le nombre de cases du parcours (4) est choisi pour que les probabilités de victoire de la tortue et du lièvre soient respectivement $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,48$ et $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,52$. Étant les plus proches possibles, cela peut engendrer un débat et inciter au recours à la simulation après quelques courses manuelles.

Scénario possible (choisi par un collectif) :

Les élèves sont répartis dans des groupes. Après distribution de l'énoncé, une phase de lecture individuelle et d'appropriation est laissée aux élèves.

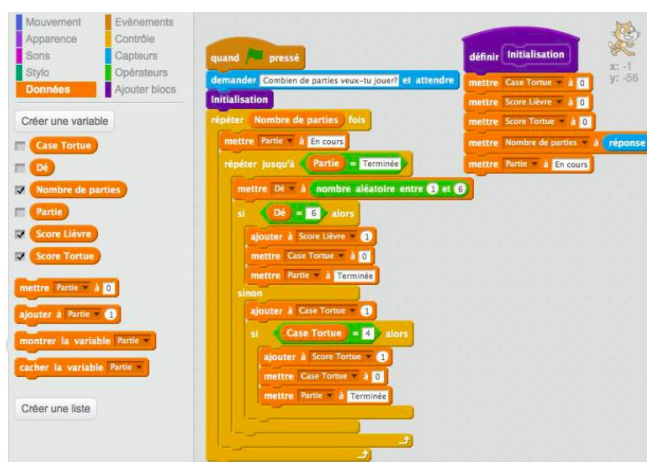
Un temps de régulation suivant permet à l'enseignant de s'assurer de la bonne compréhension de la règle du jeu. Si besoin, il est possible de jouer quelques parties au tableau avec, par exemple, un dé en mousse.

Des dés sont fournis aux élèves (peuvent être à disposition dès le départ). L'enseignant peut demander par groupe : « *Jouer 5 parties, compter puis noter les résultats au brouillon* »

Un temps de recueil des résultats de chaque groupe au tableau est ensuite l'occasion de débattre sur la possibilité ou non de répondre à la question avec les données et d'introduire l'approche fréquentiste tout en légitimant la mise en place de la simulation.

L'enseignant donne ensuite un ordinateur (classe mobile) par groupe et indique le fichier Scratch à utiliser. Ce programme, donné en mode « utilisateur », nécessite d'être décortiqué avec les élèves pour comprendre à quoi il sert (analyse du script).

Les élèves compilent les données et calculent ensuite les fréquences dans un tableau (page 2) puis réalisent un graphique des points (n, f_n) sur un support donné.



Script du programme Scratch fourni

Nombre de parties jouées	10	20	30	...	100	150	200	250	...	500	600	...	1 000	1500	2 000
Nombre de parties gagnées par la tortue															
Nombre de parties gagnées par le lièvre															
Fréquence de parties gagnées par la tortue															
Nombre de parties gagnées par le lièvre															

Type de tableau à compléter.

Quelques pistes d'institutionnalisation

Lors de la phase de bilan, il semble pertinent de revenir sur l'intérêt de la simulation en montrant les fréquences obtenues en compilant l'ensemble des données.

Un dernier fichier Scratch peut également être utilisé pour montrer que la fréquence que le lièvre gagne se stabilise autour de 0,52 à partir d'un « grand » nombre de lancers (comme 2 000) et qu'un échantillon trop « petit » (10 courses) ne permet pas de répondre.

L'institutionnalisation portera sur une version « allégée » de la loi faible des grands nombres de type : Plus on fait de parties, plus la fréquence que le lièvre gagne semble se stabiliser vers un nombre. On obtient ainsi une estimation que la probabilité que le lièvre gagne.

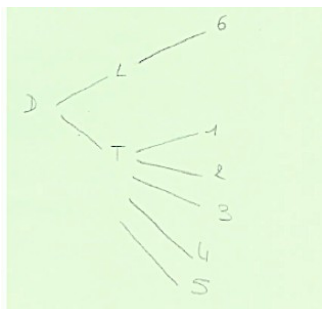
L'enseignant pourra, durant le travail des élèves, utiliser des relances.

Déclencheur d'intervention	Intervention de l'enseignant	Effets attendus
L'élève pense que chacun joue à son tour	P « <i>Qui lance le dé ? Qui commence la partie ? Le lièvre ou la tortue ?</i> » Manipulation par le professeur qui vient jouer dans une course dans un groupe en interne avant régulation en plénière	Comprendre la règle
L'élève donne $1/6 * 4$ comme probabilité que le lièvre gagne	P « <i>Et s'il y avait 7 cases au parcours ?</i> »	Faire invalider un biais de linéarité (dans ce cas $1/6 * 7 > 1$) or une probabilité est comprise entre 0 et 1.
Des élèves exécutent le programme Scratch juste en appuyant sur drapeau vert sans comprendre	Questionner le sens du programme. En référer au script préalablement imprimé avec des repères et aides, en ciblant des instructions	Comprendre le script et le relier à la règle du jeu.

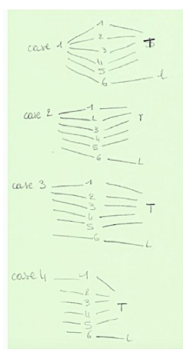
Extrait de la grille d'intervention de l'enseignant (cahier de LS « Lièvre et tortue »)

Production d'élèves :

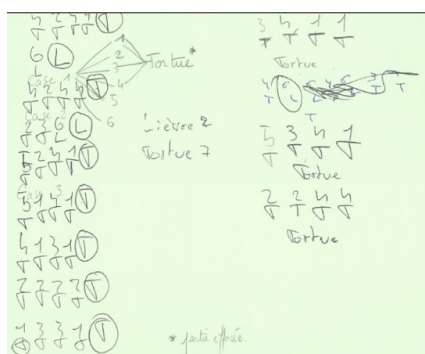
Des tentatives d'arbres : Certains élèves initialement tentent de représenter des arbres de dénombrement. L'élève E' ayant initié une structure d'arbre pour chaque case séparément, l'efface ensuite et y superpose des résultats de lancers de dés faits à la main (réorientation du travail liée à la demande de l'enseignant de lancer des dés).



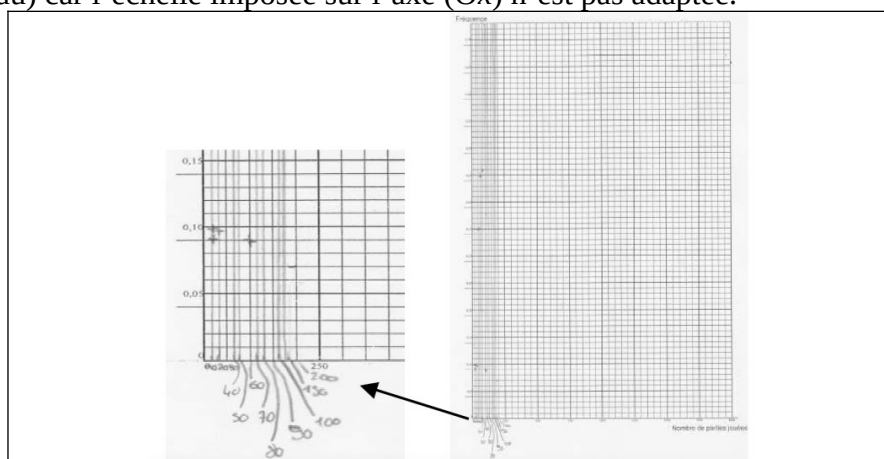
Brouillon de l'élève E



Évolution du brouillon de l'élève E'



Le support graphique : Lors de la réalisation d'un graphique, le groupe cherche à placer des premiers points (n, f_n) et rencontre des difficultés pour les points d'abscisses de 10 à 100 (indiqués dans leur tableau) car l'échelle imposée sur l'axe (Ox) n'est pas adaptée.



Production d'un groupe d'élèves, LS « Lièvre et tortue »

Pour aller plus loin :

Le dé est ici supposé équilibré (induisant une loi uniforme discrète sur $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$). Ceci peut être modifié en considérant un dé pipé.

Deux modèles probabilistes peuvent être choisis : l'espace probabilisé avec la loi géométrique tronquée ou l'espace probabilisé avec la loi binomiale. Une analyse approfondie sur ce point se trouve dans le cahier de LS ([lien](#))

Vigilances liées aux choix présentés :

Pour l'énoncé : le parcours est présent et pourrait être à l'initiative des élèves. La case d'arrivée en rouge peut poser problème (vue comme une case interdite en lien avec sa couleur).

Pour le nombre de parties imposées : en faire jouer 10 parties (au lieu de 5) permet d'avoir la possibilité d'égalité entre le lièvre et la tortue.

Pour la simulation : En amont de la séance, les élèves pourraient construire un premier fichier pour simuler une partie de jeu (deux temps). Une variante du fichier Scratch peut être à disposition des élèves (lien) : il reprend la situation de 10 parties sans imposer de nombre de parties afin de leur laisser la possibilité de modifier le fichier (en particulier le « répéter 10 fois » et aussi le « attendre »). Ceci pourrait amener les élèves à envisager la fluctuation d'échantillonnage et aborder l'approche fréquentiste des probabilités. L'utilisation du paramètre « Nombre de parties » dont la valeur est obtenue avec le « demander et attendre » constitue une réelle difficulté. On peut à la fin, utiliser l'instruction « demander et attendre » pour mettre ensuite « répéter réponse fois ».

À d'autres niveaux au lycée : Aborder la fluctuation d'échantillonnage avec l'algorithmique (en 2nde) et un programme Python, ou la traiter avec un arbre pondéré (en 1^{ère}). On pourra dans ce cas calculer les probabilités que le lièvre et la tortue gagnent. Complexifier l'énoncé sera également possible pour des élèves de Terminale.