Situation « Aire de baignade ».

Mots clés : aire, longueur, proportionnalité, modélisation, fonctions, extremum, optimisation

Énoncé :

Aire de baignade
Les moniteurs d'une colonie de vacances souhaitent amener 120 enfants se baigner tous ensemble dans un lac. Pour délimiter une aire de baignade de forme rectangulaire, ils disposent d'une ligne d'eau de longueur 25m.
Article D13322-10 Transféré du Décret n°2008-990 du 18 septembre 2008-art.1 Modifié par décret n° 2006-676 du 8 juin 2006-art.2() JORF 10juin 2006 (extrait). La fréquentation maximale instantanée en baigneurs présents dans l'établissement ne doit pas dépasser trois personnes pour 2 mètres carrés de plan d'eau en plein air et une personne par mètre carré de plan d'eau couvert.
Pourront-ils respecter la législation ?

Niveau : Troisième - Seconde

Objectifs :

- Résoudre un problème d'optimisation.
- Avec une zone de baignade rectangulaire imposée où différents modèles fonctionnels sont possibles, travailler le concept d'extremum de fonction.

Intentions : Le type de zone de baignade étant imposé, faire produire une démarche partielle de modélisation. Renforcer les concepts d'ensemble de définition et de variations d'une fonction.

Remarque : Ici, avec une zone de baignade rectangulaire, les $80m^2$ nécessaires ne sont pas atteints donc la loi ne peut pas être respectée.

Scénario possible (choisi par un collectif) :

Une phase de lecture individuelle et d'appropriation de l'énoncé, est laissée aux élèves, suivie d'un temps bref de régulation où l'enseignant s'assure de la bonne compréhension du vocabulaire.
Un temps de travail individuel (15 min) permet ensuite à chacun d'entrer dans la résolution (feuille A4 en support de trace écrite).
Il est suivi d'un temps de débat (10 min) sur les premières questions soulevées par l'énoncé ainsi que sur les choix et les hypothèses de modélisation[1]. Un résumé est fait au tableau (bilan intermédiaire).

<u>Exemple de premières questions d'élèves relevées au tableau :</u>
- Quel est le nombre de m^2 minimum pour 120 enfants sachant que pour 3 enfants il faut 2 m^2 au minimum ?

[1] Un article d'Yvain-Prebiski & Masselin de [REPERES IREM dans le n°131]() de juin 2023 permet d'approfondir la modélisation sur cette situation.

- Quelles sont les dimensions du lac ?
- La zone de baignade est-elle collée à la plage ?
- Quelle forme a la zone de baignade ?

Une phase de travail des élèves en groupe (35 min) est réalisée après le bilan intermédiaire. Dans chaque groupe, les élèves échangent sur leurs recherches et se mettent d'accord sur une synthèse écrite (une unique feuille A4 à rendre par groupe).

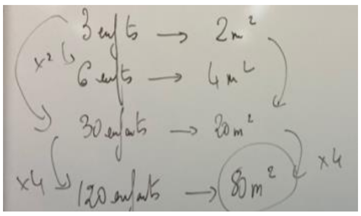
On pourra, durant ces phases, utiliser des relances (voir extrait grille d'intervention de l'enseignant).

Déclencheur d'intervention	**Interventions de l'enseignant**	**Effets attendus, buts**
L'élève questionne : « C'est quoi une ligne d'eau ? »	P : « C'est une sorte de corde qui peut flotter et limite l'endroit où on peut se baigner. »	Comprendre qu'on ne parle pas de la ligne d'eau-couloir de piscine mais d'une chaîne de flotteur. Expliquer le rôle de la ligne d'eau
Le groupe représente une zone fermée (un rectangle, un carré)	P : « Comment font les enfants pour entrer dans la zone ? »	Idée de laisser la zone ouverte sur un côté.
Le groupe n'envisage que des zones rectangulaires à dimensions entières	P : « Pourquoi ne pas avoir choisi autre chose que des nombres entiers pour les dimensions de vos rectangles ? »	Questionner la nature des nombres choisis pour dépasser le travail dans le cadre discret.
Le groupe introduit deux variables pour les dimensions du rectangle sans les relier.	P : « Avez-vous vraiment besoin de la seconde variable ? Pouvez-vous faire sans ? » P représente un segment, il y place 25 et matérialise une longueur *x*. Il demande d'exprimer le complément à 25 à l'aide de cette variable.	Idée d'éliminer une variable pour ensuite exprimer l'aire en fonction d'une variable uniquement. Idée de faire visualiser « à plat » la ligne d'eau pour faciliter l'expression liant les deux variables.

Extrait de la grille d'intervention de l'enseignant, « P » désigne l'enseignant

Un exemple de bilan intermédiaire :

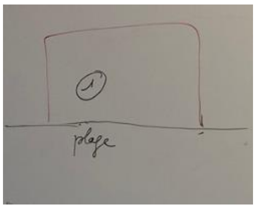
Pour dire si la loi est respectée, il est nécessaire de :
- connaître l'aire nécessaire pour tous les enfants ;
- élaborer des zones de baignade respectant la contrainte de la longueur de la ligne d'eau.

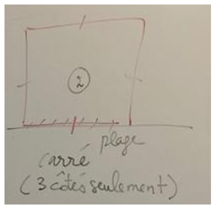


Une procédure de groupe explicitée en appui

Il faut au minimum 80 m^2 pour les 120 élèves.

L'enseignant dessine au tableau à main levée de représentations amorcées individuellement* et repérées





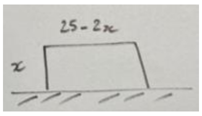
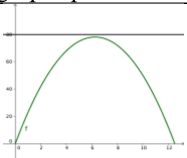
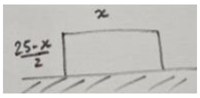
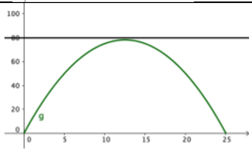
Pour résoudre ce problème, on a fait des premières hypothèses de modélisation :
- tous les enfants se baignent simultanément,
- le lac a une aire est suffisamment grande (plus de 80 m^2)
- la berge est supposée rectiligne, …
- la zone de baignade est rectangulaire,
- la ligne d'eau délimite trois côtés de la zone, le quatrième côté permettant d'entrer dans l'eau.

**on peut proposer au moins deux zones rectangulaires de dimensions distinctes si elles émergent*

Ce bilan intermédiaire permettra de relancer le travail des élèves en groupe vers l'étude des variations d'une fonction et d'en rechercher le maximum.

Une phase de bilan et d'institutionnalisation sera réalisée à la séance suivante (nécessite du temps, environ 35 min). À partir de synthèses de groupes (sélectionnées par l'enseignant), il s'agira d'un temps de retour sur la recherche d'extremum de fonctions

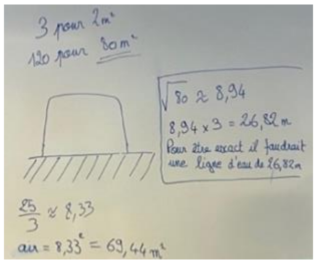
Des pistes de bilan et d'institutionnalisation :
Le bilan peut être l'occasion de légitimer le passage du discret au continu, et donc le recours à une fonction de la variable réelle. C'est également l'occasion de donner du sens à l'ensemble de définition comme intervalle réel.
Il peut s'appuyer sur l'étude d'une des fonctions envisagées par la classe.

Modélisation algébrique	Ensemble de définition expression de fonction	Représentation graphique	Maximum atteint
	$Df = [0; 12{,}5]$ $f(x) = x(25 - 2x)$		Maximum 78,125 atteint en $x = 6{,}25$ tableau des variations réalisé
	$Dg = [0; 25]$ $g(x) = x\left(\frac{25-x}{2}\right)$		Maximum 78,125 atteint en $x = 12{,}5$ tableau des variations réalisé

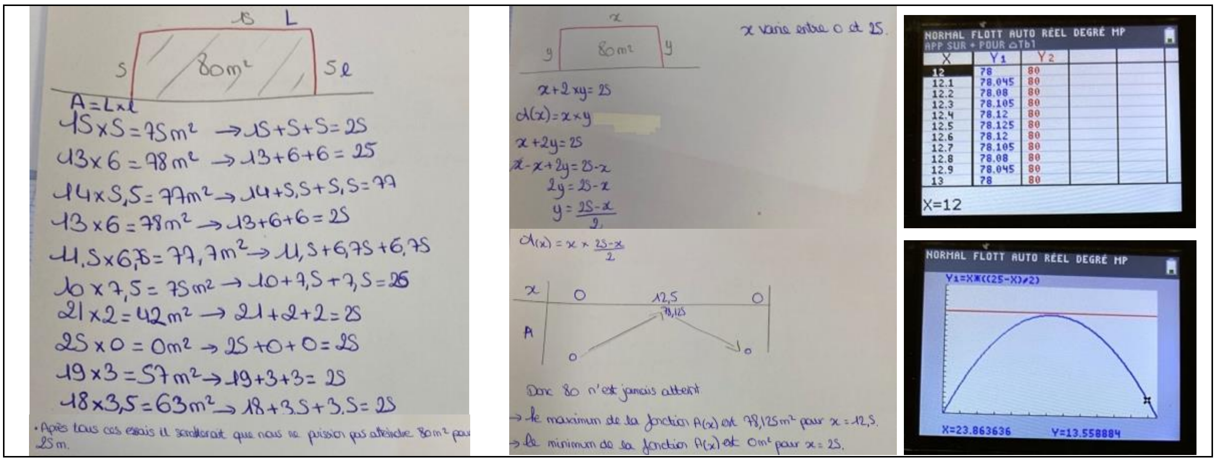
L'enseignant peut faire envisager à tous les élèves une étude similaire pour la seconde fonction.
En conclusion (en seconde), nous conjecturons que le maximum d'aire atteint est de 78,125 m^2 sous les hypothèses de modélisation choisies au départ. Donc la loi ne pourra pas être respectée avec une zone de baignade de type rectangulaire.

Productions d'élèves :
Une zone de baignade carrée :

Le groupe choisit une zone de baignade carrée de côté 25/3 en estimant son aire à $69{,}44\ m^2$. Une élève a trouvé la contrainte d'atteindre 80 m^2 pour que la colonie se baigne toute ensemble. Puis, le groupe estime la longueur de ligne d'eau nécessaire pour une zone de baignade carrée de 80 m^2 et s'arrête.

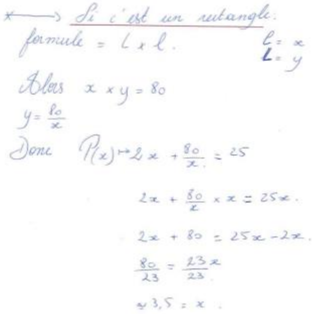


Une production de groupe avec un choix de modèle fonctionnel :
Le groupe considère plusieurs zones rectangulaires, et en estime les aires. Il poursuit son travail en introduisant deux variables x et y et exprime y en fonction de x. Avec une calculatrice graphique, il saisit l'expression algébrique de l'aire en fonction de la variable x.
Il règle le pas de la table de valeurs (réglé à 1 par défaut) pour préciser les valeurs obtenues sur [12 ;13] orienté par des premiers essais manuels et où semblait se situer une aire maximale. Il conjecture graphiquement le maximum de A semble 78,125 m^2 et atteint en $x = 12{,}5m$.



Une entrée par une fonction « périmètre » :

Le groupe choisit une zone rectangulaire et exprime le périmètre de la zone en fonction d'un des deux côtés égaux qu'il nomme x.
Souhaitant atteindre une aire de 80 m^2, il exprime le second côté en fonction de x $(80/x)$ qu'il réinjecte dans l'expression $\mathrm{P}(x)$. Puis il cherche à résoudre $\mathrm{P}(x) = 25$.
Il oublie alors le carré pour le premier terme.



Pour aller plus loin :
En seconde, on peut alors modifier l'énoncé et parler de zone de baignade sans induire sa forme. Le travail de modélisation sera alors plus conséquent. Considérer une zone semi-circulaire sera par exemple l'occasion de travailler le concept d'équation si la plage est considérée rectiligne. (*voir autre fiche situation en bref aire de baignade*)

En seconde ou première, considérer une zone de baignade rectangulaire à l'aide d'un modèle fonctionnel sera l'occasion de travailler différentes formes algébriques d'une expression (en amont de la notion de dérivée). Prouver leur égalité est envisageable via le développement des formes factorisées et canoniques.
Par exemple, la fonction f exprimant l'aire en fonction de x , variant entre 0 et 12,5 est alors :
$f(x) = x(25 - 2x)$ *forme factorisée*
$f(x) = -2(x - 6{,}25)^2 + 78{,}125$ *forme canonique*
$f(x) = -2x^2 + 25x$ *forme développée*
Une réflexion peut être menée sur l'ensemble de définition, ses valeurs aux bornes (via un retour à la situation réelle).
À partir de la forme canonique, l'élève pourra démontrer que le maximum de la fonction f est 78,125 et qu'il est atteint en $x = 6{,}25$ (dans le cas d'une zone rectangulaire).
On pourra poursuivre et institutionnaliser des éléments concernant les variations et graphes de fonctions polynômiales du second degré dans le cas général, et en particulier le lien entre le sommet de la parabole et l'extremum de la fonction.

À d'autres niveaux :
Cette situation peut être envisagée en cycle 3 avec un objectif visé centré sur les grandeurs en jeu (aire, longueur), leur mesure et leur distinction (lien).