

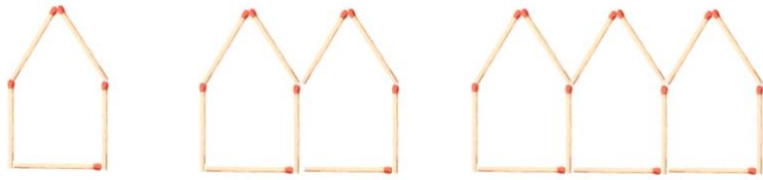
Situation « Allumettes »

Mots clés : périmètre, nombre, pattern, modélisation

Énoncé :

Allumettes

Voici quelques suites de maisons construites avec des allumettes. On cherche à déterminer le nombre d'allumettes à n'importe quelle étape ultérieure, aussi éloignées soit-elle, la 10^{ème} étape ou la 37^{ème} étape, par exemple.



1^{ère} étape 2^{ème} étape 3^{ème} étape

À quelle étape utiliseriez-vous exactement 237 allumettes ?

Niveau : Cycle 3 (envisageable dès le CM1) et au cycle 4

Objectifs : Résoudre un problème impliquant un travail arithmétique autour du nombre

Intentions : Inciter les élèves à prendre des initiatives de modélisation du problème

Scénario possible (choisi par un collectif en liaison CM2-6^e) :

Phase 1 (15 min) : Travail individuel après lecture de l'énoncé.

Coté élèves, l'enseignant permet une manipulation d'un nombre restreint d'allumettes¹ (nombre modulable selon le niveau des élèves). En donner 20 permet de réaliser jusque l'étape 4, et il manque une allumette pour réaliser l'étape 5.

Si les élèves demandent spontanément plus d'allumettes, ne pas en fournir davantage afin qu'ils entrent dans une phase de représentation et d'abstraction. Les inciter à écrire leur calcul qui a permis de dénombrer les allumettes pour les premières étapes réalisées sur leur table.

Phase 2 (30 min) : Travail en groupe de 4 élèves

L'enseignant demande de rédiger une procédure détaillée pour le groupe (sur une feuille A4)

On pourra, durant ces phases, utiliser des relances (voir extrait grille d'intervention de l'enseignant)

Déclencheur d'intervention	Intervention de l'enseignant	Effets attendus
Un élève ne comprend pas le mot « ultérieure »	S'appuyer sur la définition du dictionnaire ou dire : « cela veut dire suivante. »	Faire émerger un travail autour de l'étape 4, puis 5

¹ On prendra soin d'enlever les bouts rouges des allumettes par mesure de sécurité.

L'élève confond le numéro de l'étape et le nombre d'allumettes. Il dit que c'est impossible d'avoir 10 allumettes.	P « Tu dois distinguer l'étape numérotée et le nombre d'allumettes qui permet de réaliser la figure de l'étape. » P demande « À l'étape 2, il te faut combien d'allumettes pour reproduire la figure ? »	Faire distinguer les deux types de nombres en jeu. À l'étape 2, deux allumettes ne suffisent pas à représenter la figure (pour une maison il faut déjà 5 allumettes)
Un élève tente de passer directement de la 3 ^e étape à la 10 ^e et se dit bloqué.	P lui propose de s'intéresser aux 4 ^e puis 5 ^e étapes.	Permettre à l'élève de repérer des régularités entre deux étapes consécutives.

Extrait de la grille d'intervention de l'enseignant

Phase 3 (15 min) : phase de bilan et d'institutionnalisation. *Elle peut être organisée à la séance suivante.*

Pistes de bilan et d'institutionnalisation : Voilà des éléments adaptables au contexte de la classe.

Il y a plusieurs façons de dénombrer à chaque étape le nombre d'allumettes utilisées.
Étude des premières étapes :

Numéro de l'étape	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'allumettes	5	9	13	17	21	25	29

1^{ère} procédure : comment passer d'une étape à la suivante ?

- 1) Le nombre d'allumettes à l'étape 1 est de 5.
- 2) À l'étape 2 on ajoute une maison donc 4 allumettes de plus (il en faut 5 pour une maison entière mais un mur vertical de la nouvelle maison est déjà présent) : il y a donc $5 + 4$ soit 9 allumettes.



- 3) Et ainsi de suite, si on connaît le nombre d'allumettes à une certaine étape, à la suivante on ajoute 4 allumettes pour la maison supplémentaire.

2^e procédure : une formule (explicite) en fonction du numéro de l'étape

- 1) Dénombrer le nombre d'allumettes des toits des maisons : deux fois le nombre du numéro d'étape
Exemple à l'étape 7 : on a 2×7 allumettes pour les toits, soit 14 allumettes



- 2) Dénombrer les allumettes des murs verticaux : nombre du numéro d'étape plus 1
Exemple à l'étape 7 : on ajoute 8 allumettes verticales



- 3) Dénombrer les allumettes horizontales des sols : nombre du numéro d'étape
Exemple à l'étape 7 : on ajoute 7 allumettes au sol



- 4) Ajouter l'ensemble des allumettes : 4 fois le numéro d'étape plus 1

Exemple à l'étape 7 : $14 + 8 + 7 = 29$. Il faut 29 allumettes en tout à l'étape 7. Et $29 = 4 \times 7 + 1$

3^e procédure : une autre façon de calculer...

- 1) Chaque maison nécessite 5 allumettes si elle n'est pas collée aux autres.



- 2) Le fait de les coller, des allumettes verticales intermédiaires sont comptées en trop (encerclée). Elles sont à enlever, et cela revient à ôter le nombre du numéro d'étapes moins 1.



- 3) Au total il y a comme nombre d'allumettes 5 fois le nombre du numéro d'étape moins une fois le nombre de l'étape moins 1.

Les deuxième et troisième procédures reviennent-elles au même ?

À l'étape n (entier naturel supérieur ou égal à 1), le nombre total d'allumettes peut s'exprimer à l'aide de n :

2 ^e procédure	3 ^e procédure	Différence entre les deux expressions
$4 \times n + 1$	$5 \times n - (n - 1)$	$5 \times n - (n - 1) - 4 \times n - 1$ $= n - (n - 1) - 1$ $= n - 1 - (n - 1)$ $= 0$
<i>Donc les deux expressions sont égales.</i>		

Production d'élèves :

Un raisonnement de groupe :

En « remontant » les calculs (1^{ère} procédure)

$$237 - 1 = 236$$

$$236 = 200 + 36$$

$$236 = 4 \times 50 + 4 \times 9$$

Donc $236 = 4 \times 59$ C'est donc à l'étape 59 qu'il y aura 237 allumettes utilisées.

Les élèves de CM2 et 6^e ont accès à la division euclidienne tandis que des CM1 pourront s'appuyer sur un répertoire multiplicatif (multiples de 4).

À d'autres niveaux :

Au cycle 4, cette situation est parfaitement adaptée car elle peut viser la production d'expressions algébriques, éventuellement d'une équation et du calcul littéral avec suppression de parenthèses précédées du signe « moins ».

Au lycée, en première (spécialité maths), des situations analogues permettront d'introduire le concept de suites.

Pour aller plus loin : Le nombre d'allumettes proposées dans la question est une variable didactique tout comme rendre possible sur un temps court une manipulation.