Cahier de Lesson Study

Année 2024-2025

« Somme d'entiers consécutifs »

Co-écrit par :

Les enseignants du groupe « Activité - Lesson Study » de l'IREM de Rouen participants à cette Lesson Study en 2024-2025,
Turquetille Catherine, Minot Éric, Declercq Hélène, Beaudet Caroline, Hartmann Frédéric, Martin Jordan, Masselin Blandine.

L'équipe de formation-recherche :

Takeshi Miyakawa, chercheur de l'Université Waseda, Japon,
Blandine Masselin, chercheure associée au LDAR de l'Université de Paris-Cité
Cécile Ouvrier-Buffet, chercheure du LDAR de l'Université de Paris-Cité

Avec le soutien de :

L'Action 2 du PIA3 100% IDT, des IA-IPR de l'Académie de Normandie,

Table des matières

1. Introduction

La situation « Somme d'entiers consécutifs »

Nous présentons la situation initiale « Somme d'entiers consécutifs » inspirée de l'énoncé de l'IREM de Lyon qui a servi de base pour notre préparation de Lesson Study :

Trouver le plus rapidement possible la somme de 10 nombres entiers consécutifs.

Figure 1 : Énoncé du germe de situation « Somme d'entiers consécutifs »

Description de la situation

L'un des objectifs était de trouver une situation permettant de travailler sur la notion de preuve au second degré. La somme de dix entiers consécutifs peut se calculer sans grande difficulté. La possibilité de calculer une telle somme le plus efficacement possible demande d'établir une méthode qui devrait être démontrée. L'un des intérêts est de faire émerger l'idée que sans une preuve mathématique, nous ne pouvons être certain qu'une méthode donne le bon résultat, et ce quels que soient les entiers consécutifs choisis. En outre, il est nécessaire de faire émerger l'idée que des exemples ne suffisent pas à prouver la vérité d'une affirmation mathématique. Les élèves passent alors d'un exemple générique à une preuve intellectuelle[1].

BO et Compétences au cycle visé

Au collège : Enchaîner des étapes logiques

Communiquer une preuve de manière claire et rigoureuse

- Rédiger une démonstration
- Présenter oralement une preuve

Valider une démonstration

Questionner des affirmations

Explorer des conjectures

Au lycée : Maîtriser les techniques de preuve classiques

- Preuves directes
- Preuves par l'absurde
- etc...

Si la situation peut aussi s'envisager dans un autre cycle, nous précisons des éléments du programme concernant certains concepts.

BO et Compétences dans un autre cycle

Développer des procédures par essais erreurs

Organiser une recherche

Établir une règle pour apporter une preuve mathématique

Prendre appui sur les relations entre les nombres et leur domaine de validité dans le cadre d'une procédure de calcul mental

Travailler la numération décimale

Compétences mathématiques visées dans la réalisation de cette situation.

Chercher, calculer, communiquer, raisonner, représenter.

---

[1] Selon Balacheff (2017)

2. Analyse a priori

Objectifs

En 5ème : Trouver un programme de calcul, une procédure une expression littérale.
En 4ème et après : Conjecturer, énoncer, formaliser, rédiger des propriétés mathématiques et les démontrer

Connaissances mises en jeu

Les enseignants préparant une Lesson Study ont dégagé ces éléments d'analyse a priori de la situation « Somme d'entiers consécutifs ».

Connaissances maths en jeu	Numération, nombres entiers Caractériser des nombres entiers consécutifs Expression littérale Suite arithmétique, somme des n premiers entiers $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ Décomposition d'un entier en somme de plusieurs entiers Propriétés de l'addition et de la multiplication Multiplication par 10 Divisibilité par 5
Dimension vie quotidienne (aspect modélisation)	Modélisation intra-mathématique : Utilisation de la lettre Représentation visuelle On peut imaginer un problème « concret » mettant en jeu la somme de 10 entiers consécutifs : les pyramides. Taper une fois dans le sac puis 2 fois, puis 3 fois, jusqu'à 10 puis on redescend Tour de magie, calcul rapide
Place dans la(les) progression(s)	5e et après : expression littérale
Dimension TICE et/ou matérielle	Ni tableur ni calculatrice Usage contrôlé : utile pour tester mais limiter son usage Le tableur de l'enseignant pour vérifier
Démarches possibles des élèves	Preuve sans mot. Faire des regroupements « à la dizaine » mais difficilement généralisable. Regroupement « à la Gauss » Commencer par $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 45$ Puis je décale de 1: $2 + 3 + \ldots + 11 = 45 - 1 + 11 = 45 + 10 = 55$ Puis encore de 1: $3 + 4 + \ldots + 12 = 55 - 2 + 12 = 55 + 10 = 65$ On remarque qu'il y a +10 à chaque fois… $u_1 = 45$ et $u_{n+1} = u_n + 10$ Médiane[2] Démarche qui mène à $10n+5$ où n est le 5e nombre Conjecturer que la somme est toujours divisible par 5
Difficultés et erreurs possibles	Terme « consécutif » Erreurs de calcul Comprendre que l'on attend une procédure ou une expression littérale

Table 1 : Grille d'amorce d'analyse a priori, lieu, LS « Somme d'entiers consécutifs »

[2]Comme précisé dans le document de l'IREM de Lyon

3. Déroulement de la Lesson Study

Déroulement envisagé

Voici l'énoncé fixé par le collectif d'enseignants dont une partie est projetée au tableau et une seconde est donnée aux élèves.

Énoncé écrit au tableau :

$Vrai\ ou\ faux?$
$9+10+11=3\times 10$
$77+78+79=3\times 78$
$2024+2025+2026=3\times 2024$

Figure 2 : Vrai-Faux projeté au tableau

Puis second énoncé papier :

Comment trouver le plus rapidement possible la somme de 5 nombres entiers consécutifs ? Ou encore de 10 nombres entiers consécutifs ? *Vous devrez rédiger un message à destination d'une mathématicienne et ce message devra être suffisamment clair pour qu'elle puisse l'utiliser.*

Figure 3 : Énoncé retenu pour la LS « Somme d'entiers consécutifs »

Réponse générale : $\sum_{i=0}^{k-1} n+i = n\times k + \frac{k(k-1)}{2}$

Objectifs de la séance

En 3ème **:** conjecturer, énoncer, formaliser, rédiger des propriétés mathématiques et les démontrer.

Les démontrer, oui mais dans quel but ? Idée de faire des conjectures sur 3 entiers et de voir si ces conjectures restent vraies sur 4, 5, etc entiers.

Ce qu'on demande aux élèves est un algorithme (texte clair, non ambiguë, etc…).

Dans un deuxième temps il faudra formuler des propriétés (conjectures) qu'il faudra dans un troisième temps démontrer

Énoncé

Le vrai faux est vu comme une entrée en matière permettant un rapide engagement de tous les élèves, sans passer toute la séance sur la somme de trois entiers consécutifs. Cela permet également de soulever les différentes questions liées au vocabulaire.

L'aménagement de l'énoncé par rapport au germe de situation est lié à la volonté d'explorer progressivement des sommes de trois entiers consécutifs, de cinq puis de dix afin de repérer si une conjecture réalisée dans un cas est toujours acceptable ou non dans un autre. L'idée étant de lever des variants ou invariants. Une conjecture établie pour la somme de trois entiers peut ne plus être valable pour la somme de quatre entiers.

Matériel

Calculatrice autorisée

Modus operandi

Formation des groupes
Émetteur/récepteur : un groupe rédige une propriété mathématique à destination d'un autre groupe.

Exemple 1 de message : pour calculer la somme de 3 entiers consécutifs il suffit de multiplier par 3 celui du milieu. Si le message n'est pas clair, le message est à reformuler.

Exemple 2 de message : pour 10 entiers on met 5 au bout du cinquième comme
14 → 145.

Scénario prévu

Contexte : Le scénario se déroule dans une classe de 3ème de 24 élèves. Il est organisé sur deux séances de 50min entrecoupées par la pause méridienne, de $11h20$ à $12h10$ puis de $13h40$ à $14h35$.

Phase 1 : (15 min) Énoncé au tableau Vrai/faux (fig. 2)

Sans calculatrice, avec discussion permettant de voir que l'on peut déplacer une unité du 3e terme vers le premier et que donc « la propriété » est vraie. Quelle propriété ?

Propriété attendue des élèves : La somme de trois entiers consécutifs ordonnés est toujours égale au triple de celui du milieu.

Cette propriété est encadrée au tableau et identifiée comme le message clair pour la mathématicienne de l'énoncé papier.

Phase 2 : (35 min) Distribution et lecture de l'énoncé papier puis recherche.

Temps de lecture : 5 min
Temps de recherche individuelle : 5 min
Temps de recherche en groupe : 25 min
But : Rédaction d'au moins un message pour 5 nombres consécutifs puis un message pour 10 nombres consécutifs, par groupe. L'idée est de se mettre d'accord sur des messages clairs.

Pause méridienne

Phase 3 : (30 min) Bilan Institutionnalisation

Il était prévu initialement d'utiliser l'outil Mathlive pour réaliser le recueil des propositions des élèves. Cet outil n'a finalement pas été utilisé.

Le bilan porte sur la somme de 3 entiers consécutifs, puis celle de 5 entiers consécutifs. L'enseignant demande si cela fonctionne encore pour 7 et suscite un débat.

Phase 4 : (20 min) Travail en groupe sur la somme de 10 entiers consécutifs

Les propriétés :
L'enseignant expose en les recopiant au tableau et en les numérotant les messages/propriétés (en évitant les doublons). En proposer un faux et en ajouter si nécessaire.
Lecture à la classe et commentaires sur les messages : sont-ils clairs, non ambigus, etc ?
Les corriger, en barrer certains, en valider d'autres.
Grouper les messages selon les sommes (5 et 10 entiers consécutifs).
On peut montrer ainsi qu'une stratégie qui fonctionne sur 3 voire 5 ne fonctionne plus avec 10. Pointer que certaines stratégies fonctionnent pour tous.

Question de la preuve
Pour envisager de démontrer les propriétés retenues, les outils suivants pourront être utilisés :

- des patterns pour justifier
- des preuves génériques
- des schémas (comme la fig. 4)
- l'utilisation de briques
- l'utilisation du tableur
- l'utilisation d'une lettre

Il n'est pas envisagé de démontrer le cas des k entiers consécutifs.

Bilan : Aller vers la **lettre** par une preuve **générique** ou encore une preuve sans mot

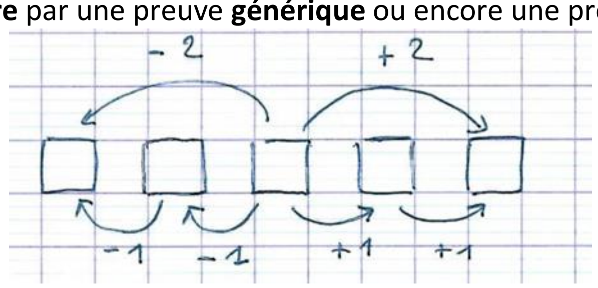


Figure 4 : exemple de schéma support de preuve générique

k=5 : 24+25+26+27+28=26+26+26+26+26=5 × 26
k=10 : 12+13+14+15+16+17+18+19+20+21=10 × 16+5

Propriété 1 : On considère la somme S de 10 entiers consécutifs ordonnés dans l'ordre croissant. Si x est le cinquième de ces entiers alors on a S=$10x$+5.

Propriété 2 : On considère la somme S de 10 entiers consécutifs ordonnés dans l'ordre croissant. Si x est le premier de ces 10 entiers alors on a S=$10x$+45.

Propriété 3 : On considère la somme S de 10 entiers consécutifs ordonnés dans l'ordre croissant. Si x est le cinquième de ces 10 entiers alors on a S=$11x$-(x-5).

Proposer ensuite aux élèves de démontrer ces propriétés.

Analyse a posteriori du déroulement effectif

Des points saillants

- Un élève a très vite pensé à utiliser le calcul littéral pour démontrer le résultat concernant la somme de trois entiers consécutifs. C'est ainsi le calcul littéral qui a été privilégié pendant tout le reste de la séance.
- Le choix de commencer avec 3 entiers consécutifs a fait émerger une conjecture sur le « nombre du milieu » qu'ils ont « calqué » sur la résolution concernant 5 entiers consécutifs.
- Le passage de la somme de 5 entiers consécutifs à 10 a provoqué une découpe en deux sous sommes de 5.

Analyse de la phase 1

Concernant la propriété énoncée par les élèves : « la somme de trois entiers consécutifs est toujours égale au triple de celui du milieu », le fait que les trois entiers consécutifs doivent être ordonnés est ici implicite. Dans un souci de rigueur, il faudrait le préciser.

Travaux des différents groupes d'élèves

Voici un panorama des productions de l'ensemble des travaux des élèves.

Groupe 1 : *non observé*

Pour la somme des 10 entiers consécutifs, les élèves ont découpé celle-ci en deux sous-sommes de 5 entiers consécutifs et s'appuient sur le nombre du milieu de chaque sous-somme.

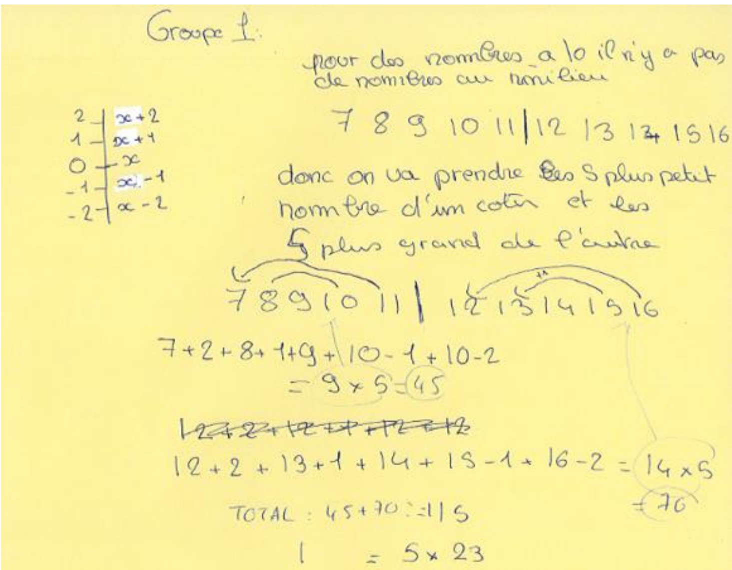
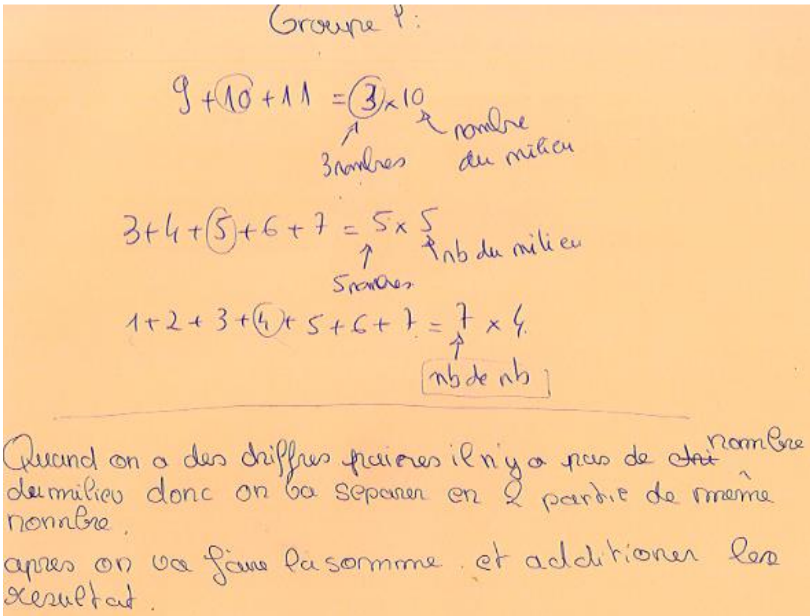


Figure 5 : production du groupe 1 en fin de matinée

Après-midi : ils reprennent ce que l'enseignante a indiqué au tableau (nombre de nombres) et dans leur règle apparaît la question de l'existence d'un entier « nombre du milieu » dans une somme avec un nombre pair de termes.


Groupe 1 :

$9 + 10 + 11 = 3 \times 10$

3 nombres — nombre du milieu

$3+4+5+6+7 = 5 \times 5$

5 nombres — nb du milieu

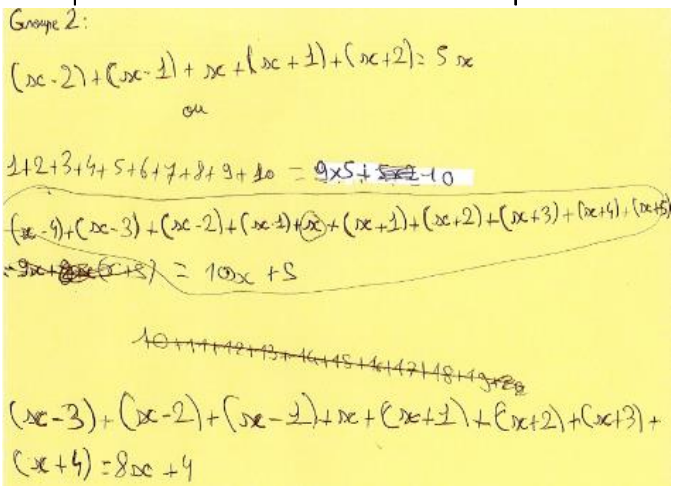
$1+2+3+4+5+6+7 = 7 \times 4$

$\boxed{\text{nb de nb}}$

Quand on a des chiffres paires il n'y a pas de ~~chi~~ nombre du milieu donc on va separer en 2 partie de meme nombre.
apres on va faire la somme et additioner les resultat.

Figure 6 : production du groupe 1 en fin de deuxième séance

Groupe 2 :
Le groupe introduit une lettre x pour le troisième nombre et exprime à partir de ce dernier algébriquement la somme de 5 entiers consécutifs. Sans justification, il l'égalise à $5x$. Leur production (feuille jaune, fig.7) montre ensuite un appui sur un exemple numérique avec le calcul de la somme des dix premiers entiers de 1 à 10 comme $9 \times 5 + 10$. Pour la somme de 10 entiers consécutifs, le groupe rebascule ensuite vers une modélisation algébrique semblable à celle réalisée pour 5 entiers consécutifs et marque comme somme $10x + 5$.


Groupe 2 :

$(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2) = 5x$

ou

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 9\times5+10$

$(x-4)+(x-3)+(x-2)+(x-1)+(x)+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5) = 10x+5$

~~10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20~~

$(x-3)+(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4) = 8x+4$

Figure 7 : production du groupe 1 en fin de matinée
Il énonce ensuite sa première conjecture exposée en haute de la fig. 8.

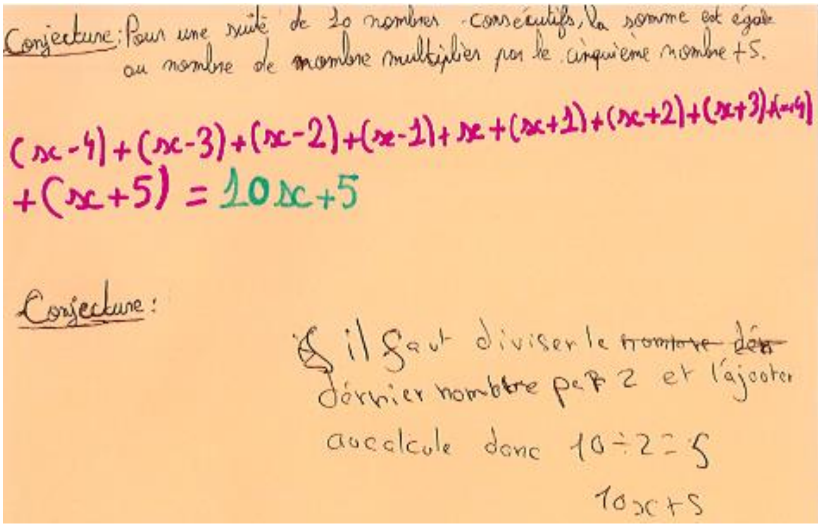


Figure 8 : production du groupe 1 en fin de deuxième séance

Leur seconde conjecture est basée sur l'analyse du membre de droite écrit en vert (fig.8) avec un lien repéré entre 10 et 5.

Groupe 3 : Synthèse du travail en groupe le matin

Individuellement, S écrit une conjecture (fig. 9a). Puis il en ajoute une seconde (fig. 9b.) précisant que le cas d'un nombre pair de termes est faux (avec ses mots)

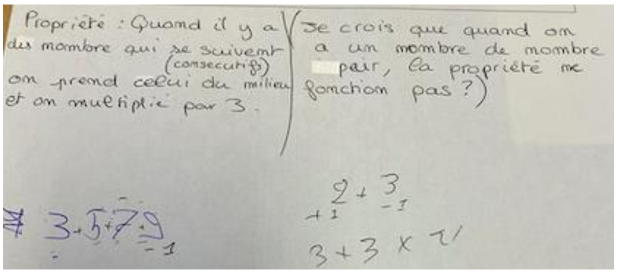


Figure 9a Brouillon de S (deux conjectures)

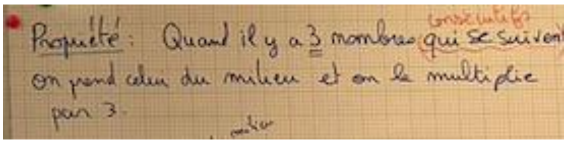


Figure 9b photo du tableau de droite (1c)

L'élève S écrit une première conjecture qui montre une persistance de la multiplication par 3 (fois « le nombre du milieu ») par rapport à la conjecture du tableau (fig. 9b). S calcule ensuite la somme de seulement deux termes (2+3) et écrit ensuite une seconde conjecture à droite (« *Je crois que* … »), marquant initialement impair et se rétractant en effaçant le « im » pour laisser nombre pair).

Il s'intéresse au calcul de $3 + 4 + 5 + 6$ (même soucis) et passe à $3 + 5 + 7 + 9 = 3 \times 8$. Il déclare au groupe que « *ça marche car 8 est le milieu* ». L'élève K tente initialement la somme $3 + 4 + 5 + 6$ puis elle en prend 8 (fig. 10) et considère deux sommes de 4 entiers consécutifs en y faisant des regroupements.

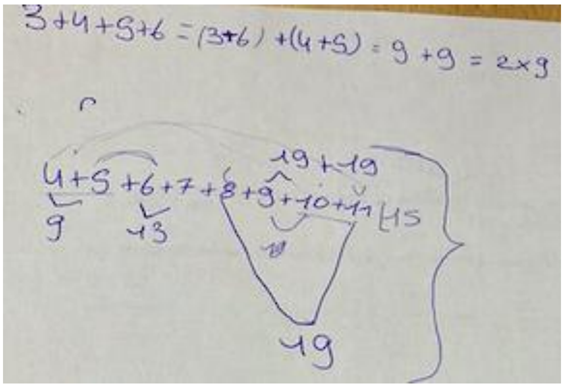


Figure 10 : brouillon de K

S et D débattent ensuite, ils tentent :
- une somme de 7 entiers consécutifs (ça marche)
- une somme de 8 entiers consécutifs (ça ne marche pas)

W essaie de son côté des sommes symétriques par rapport à 0, au départ en abaissant la contrainte « consécutifs », puis en rectifiant. Il trouve 0 à la calculatrice et note 3×0 sur sa feuille, il fait -2 + 1 + 0 + 1 + 2 = 3×0 avec sa calculatrice. Ses résultats sont partagés au groupe ce qui les persuade que la conjecture de S (en fig 9.a) est celle recherchée

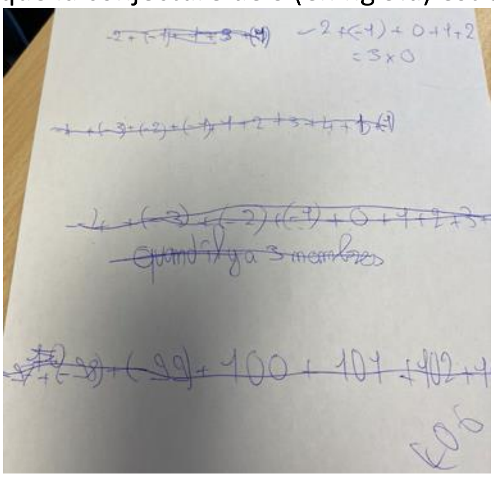


Figure 11 : brouillon de W avec la trace des calculs conduits avec sa calculatrice

L'élève K poursuit ses calculs en examinant 5 + 6 + 7 + 8 + 9, elle repère un écart de 2 entre 6 et 8, entre 7 et 9, qui est matérialisé par des flèches (identiques à celles du tableau) puis remplace les sommes 6 + 8 et 5 + 9 chacune par 7 + 7 . Trouvant que la somme vaut 14×2 ou 7×4, l'élève K conclue « Il y a plusieurs possibilités pour trouver un résultat. » (fig.12). Après écoute des avancées de S et D, l'élève K s'intéresse à la somme de 1 à 10 et identifie 5 comme nombre du milieu, l'entoure, et le fait réapparaître comme écart entre 1 et 6, 7 et 2, 8 et 3, 9 et 4. Elle décompose 10 en une somme de dix unités puis rature son égalité.

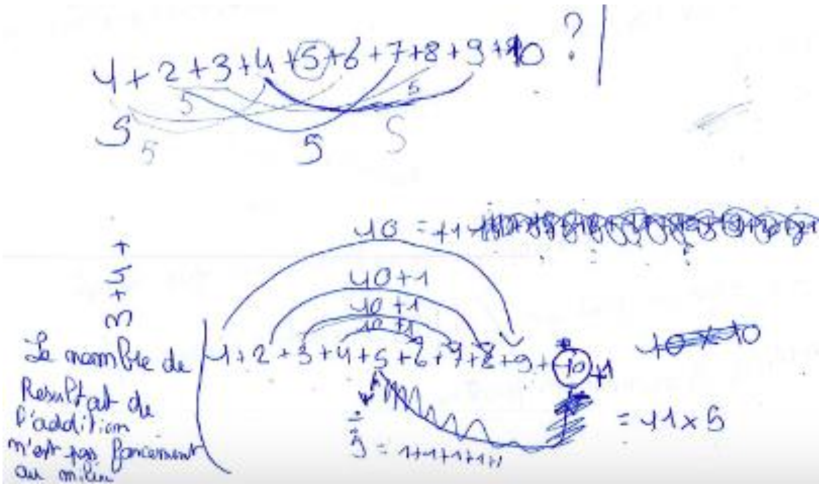


Figure 12 : Évolution du brouillon de K

L'élève K modifie sa procédure en assemblant d'autres termes deux à deux, faisant apparaître des sommes de deux termes égales à 11 (écrit $10 + 1$) et conclue à l'égalité 11×5. L'élève écrit ensuite un constat : « *Le nombre de résultat de l'addition n'est pas forcément au milieu* », qui traduit le fait que la somme s'appuie ici sur 11 et non pas sur 5 (identifié précédemment comme le nombre du milieu).

S se demande et dit oralement : « *Ce sont des maths ou de la logique ?* ».

S et D testent avec $4 + 5 + 6 + 7 = 2 \times 11$

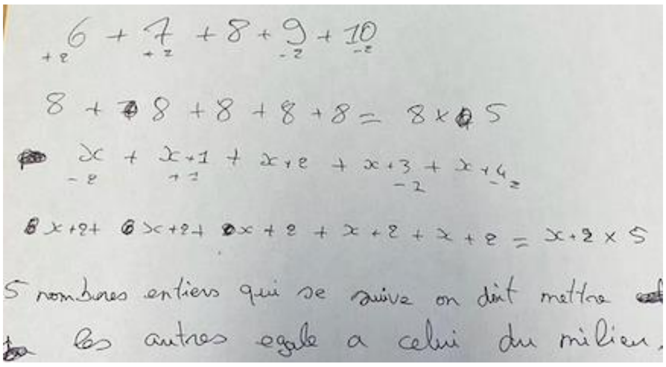
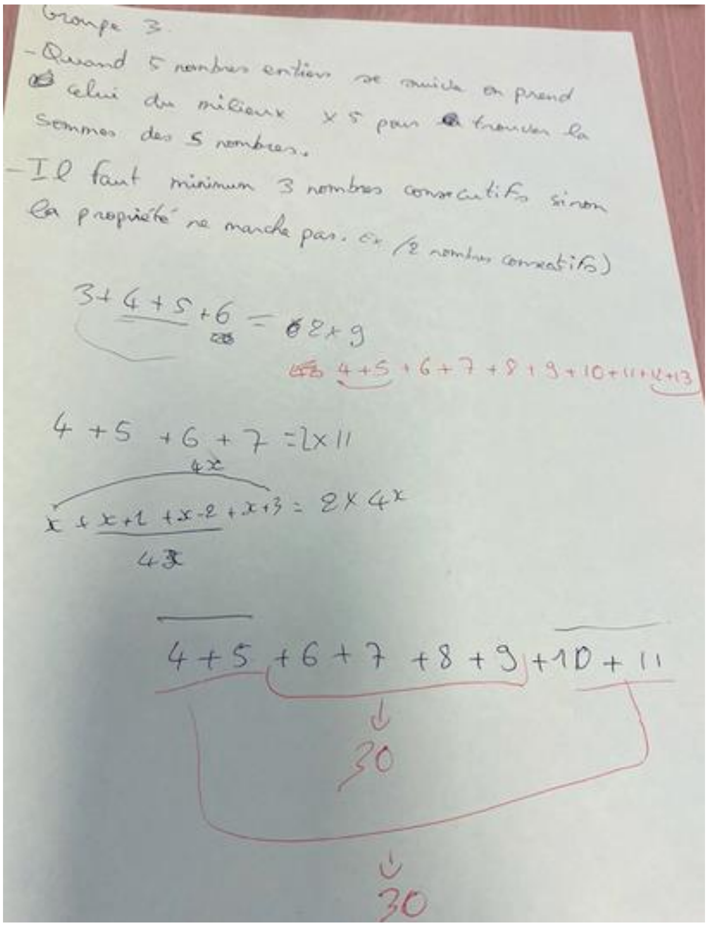


Figure 13 : Brouillon de S

L'élève S ajoute une écriture algébrique, appelant x le premier nombre de sa somme, ce qui l'amène algébriquement à $(x + 2) \times 5$ (oubli de parenthèses) comme visible en figure 13. Son explication en français tente d'expliciter sa démarche.

Le groupe finit par un test avec une somme de 8 entiers consécutifs de 4 à 11 (bas de fig. 14)



Groupe 3.
- Quand 5 nombres entiers se suive on prend celui du milieux × 5 pour trouver la sommes des 5 nombres.
- Il faut minimum 3 nombres consecutifs sinon la propriété ne marche pas. ex (2 nombres consecutifs)

3 + 4 + 5 + 6 = 2 × 9

4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13

4 + 5 + 6 + 7 = 2 × 11

4x

x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 2 × 4x

4x

4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11

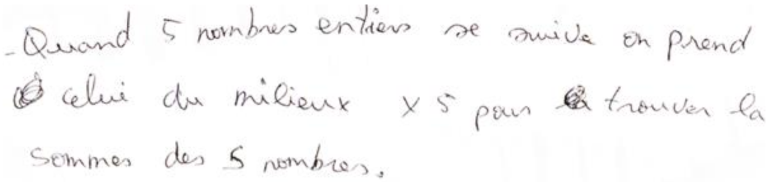
30

30

Figure 14 : Feuille de synthèse du groupe 3 (matin)

L’après-midi (2ème séance)

La phase de bilan, pour connaître le plus rapidement possible la somme de 5 entiers consécutifs, commence par la projection du message du groupe 3 (fig.15).



- Quand 5 nombres entiers se suive on prend celui du milieux × 5 pour trouver la sommes des 5 nombres.

Figure 15 : Conjecture du groupe 3

L’enseignante précise qu’il s’agit d’une conjecture, nommée conjecture 1, et qu’il faut la démontrer. D précise qu’il faut prendre x pour voir. Le groupe 5 apporte la démonstration :

$$x - 2 + x - 1 + x + x + 1 + x + 2 = 5x.$$

L’enseignante écrit au tableau une première propriété proposée par les élèves :

« Propriété : quand il y a 5 nombres consécutifs, on prend celui du milieu et on le multiplie par 5. »

Après avoir fait un point sur le rôle de x (S : le nombre du milieu ; K : c’est la base de tout) et ce que représente $x + 1$ (D dit que c’est le 4ème nombre), x + 2, $x - 1$ et $x - 2$, l’enseignante interroge sur la forme de l’expression.

Elle donne un exemple de somme : $5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 7 \times 5$ car 7 est le nombre du milieu. Mais si on a : $6 + 5 + 8 + 9 + 7$?

L'élève D dit alors qu'on ne peut pas utiliser la propriété car les nombres ne sont pas dans l'ordre. L'enseignante précise que les nombres doivent être dans l'ordre croissant. Elle demande alors aux élèves si $5x$ est une somme. L'enseignante écrit au tableau :
$5x = 5 \times x \rightarrow produit \quad 5x = x + x + x + x + x \rightarrow somme.$

La proposition du groupe 4 est ensuite exposée :

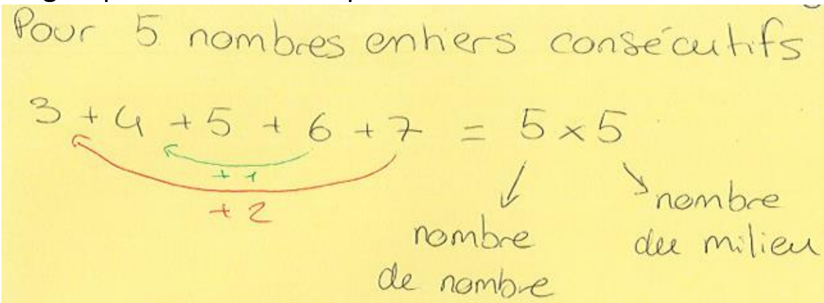


Figure 16 : Conjecture du groupe 4

La conjecture 2, celle de la fig. 16 (numérotée 2 par l'enseignante au tableau) est énoncée par un élève : quand on a une somme de 5 entiers consécutifs, on multiplie le nombre du milieu par le nombre de nombres.
L'enseignante précise que cette conjecture est vraie pour 5 nombres (démontrée par le groupe 5), vraie pour 3 (démontrée le matin). Mais l'est-elle pour 7 ? D dit : « Oui car 7 est impair. Ça marche si le nombre de nombres est impair. »

Une conjecture 3 est écrite au tableau : pour toute suite de nombres consécutifs, la somme est égale le nombre de nombres multiplié par le nombre du milieu. La chercheuse demande alors aux élèves ce qu'ils en pensent. Un débat s'installe sur le fait que le nombre de nombres ne peut pas être pair car il n'y a pas de nombre du milieu. Des élèves l'ont fait pour 4 nombres ou pour 8 nombres en utilisant d'autres techniques que celle évoquée (avec le nombre du milieu). L'enseignante relance la poursuite du travail de groupe engagé le matin pour aboutir à une conjecture ou une démonstration pour la somme de 10 entiers consécutifs.
S et D cherchent à calculer 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21. Ils ajoutent 16 et 17 ; 12 et 14 ; 13 et 15. Comme ils ne trouvent pas le même résultat, ils sont bloqués. L'enseignante leur demande alors comment ils pourraient obtenir 33 (16 + 17) autrement. S dit en faisant 14 + 19. S écrit alors :

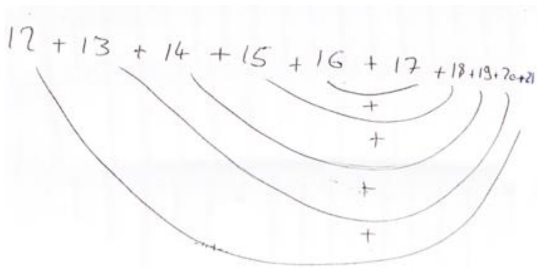


Figure 17 : recherche de la somme par S et D

Ils ont compris qu'il faut regrouper les nombres deux par deux. Mais S se demande comment on fait après. Ils prennent alors des nombres plus grands :
60 + 61 + 62 + 63 + 64 + 65 + 66 + 67 + 68 + 69 puis trouvent :

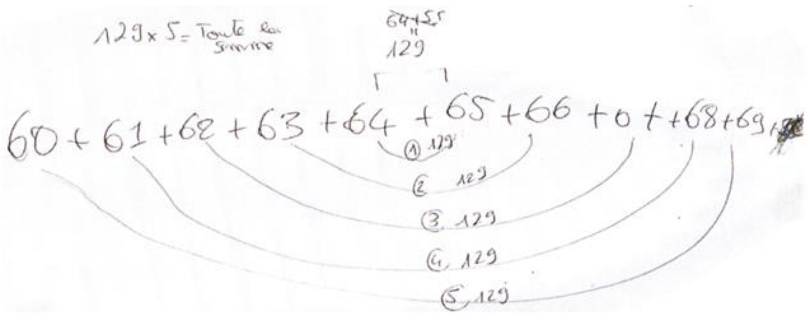


Figure 18 : Nouvelle recherche avec une autre somme par S et D

Les élèves s'appuient sur leur schéma (fig. 18) pour expliquer le $\times 5$. W annonce alors qu'il a une autre technique (fig. 19). Il a partagé la suite de 10 nombres en 2 suites de 5 nombres sur lesquelles il applique la technique trouvée le matin.

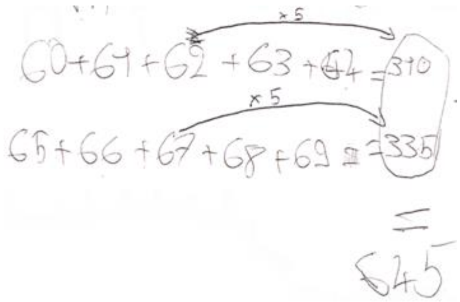


Figure 19 : brouillon de W avec partage en deux suites de 5 nombres

Groupe 4 : Synthèse du travail en groupe l'après-midi.

Somme de 10 nombres consécutifs :

Après la consigne donnée par l'enseignante, l'élève L traduit ce qu'elle en a compris : « *On doit faire une phrase* ». L'élève I lui rétorque « on fait avec x et on verra après ». I semble avoir compris qu'il a besoin d'un résultat obtenu à l'aide du calcul littéral pour ensuite le traduire en langage naturel et en faire une propriété. Ainsi, son calcul sera une preuve de la propriété. L'enseignante intervient dans le groupe en donnant raison à L et I dit « *On verra après* ».

L'analyse de cet échange montre que pour construire la propriété cherchée (c'est-à dire au sujet de la somme de 10 entiers consécutifs), il est possible de procéder de deux manières : écrire une conjecture puis la démontrer ou bien faire des investigations par le calcul qui permettent d'obtenir un résultat qu'il suffit ensuite d'énoncer.

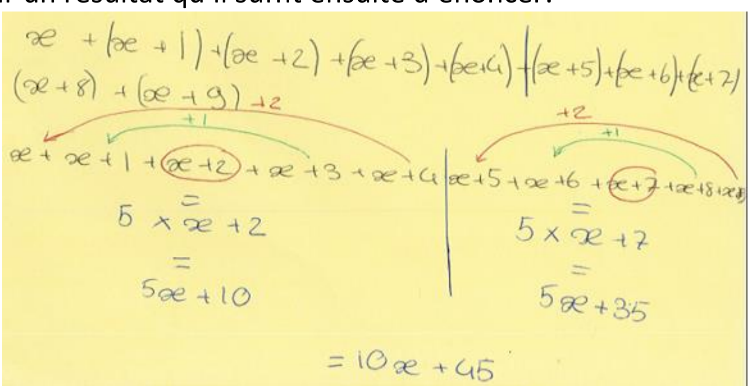
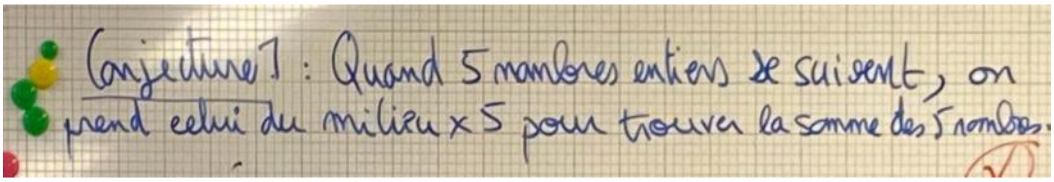


Figure 20 : Feuille de synthèse du groupe 4 le matin

Les élèves se lancent alors dans l'élaboration de la conjecture en langage naturel. Leurs réflexions s'appuient sur la démarche suivante : pour calculer la somme de 10 entiers consécutifs, ils s'appuient sur la conjecture 1 notée au tableau (fig. 21) tout en omettant un parenthésage autour de $x + 2$ et de $x + 7$:

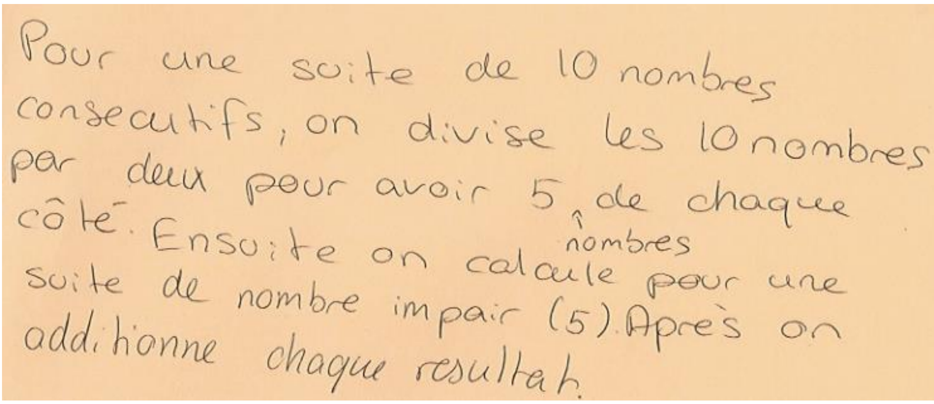


Conjecture 1 : Quand 5 nombres entiers se suivent, on prend celui du milieu x 5 pour trouver la somme des 5 nombres.

Figure 21 : Photo du tableau avec la conjecture 1 recopiée par l'enseignante

Le nombre 10 est pair et les amène à partager la somme en deux sous-sommes de 5 entiers consécutifs dont on sait qu'elle est égale au produit du nombre médian par 5. Un peu de calcul littéral permet de conclure à $S = 10x + 45$.

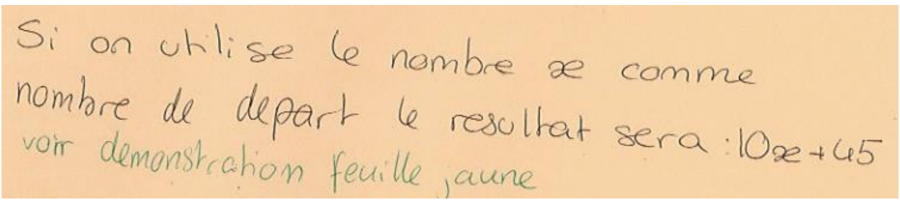
La propriété semblait acquise à cet instant : « la somme de 10 entiers consécutifs égale $10x + 45$ si x est le premier des 10 entiers » mais c'était sans compter sur une compréhension erronée de ce qui était attendu. Les élèves, sous l'impulsion de l'élève L, se mettent à rédiger en langage naturel ce qui a été fait par le calcul littéral :



Pour une suite de 10 nombres consecutifs, on divise les 10 nombres par deux pour avoir 5 nombres de chaque côté. Ensuite on calcule pour une suite de nombre impair (5). Après on additionne chaque resultat.

Figure 22 : Feuille de synthèse du groupe 4 l'après midi

Ensuite ils ajoutent :



Si on utilise le nombre x comme nombre de depart le resultat sera : $10x+45$
voir demonstration feuille jaune

Figure 23 : Ajout en fin de séance par le groupe 4

Groupe 5 :

Somme de 5 nombres consécutifs :

Le groupe a commencé par établir une propriété de la somme de 5 nombres consécutifs, en démontrant que la somme pouvait être réorganisée de manière à simplifier le calcul : ils ont utilisé des regroupements de nombres pour arriver à des calculs plus simples, sur la base de :

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = \big(n + (2)\big) + \big(n + (1)\big) + n + (n + 1 - (1)) + (n + 2 - (2))$$

Par exemple, lorsqu'ils ont examiné la somme de 5 nombres consécutifs, ils ont identifié que :

$$(1 + 2) + (2 + 1) + (3) + (4 - 1) + (5 - 2) = (3) + (3) + (2) + (3) + (3)$$

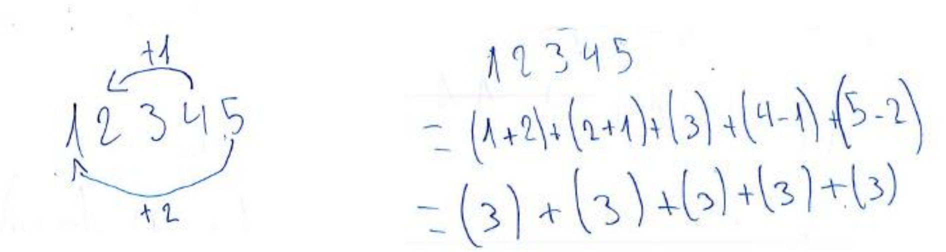


Figure 24 : regroupements initiaux réalisés pour cinq entiers consécutifs

Des nouveaux essais ont été effectués avec la somme en commençant de 9, puis de 10. Ils ont appliqué plusieurs méthodes pour calculer la somme des nombres entiers consécutifs.

Par exemple en partant de 10 :

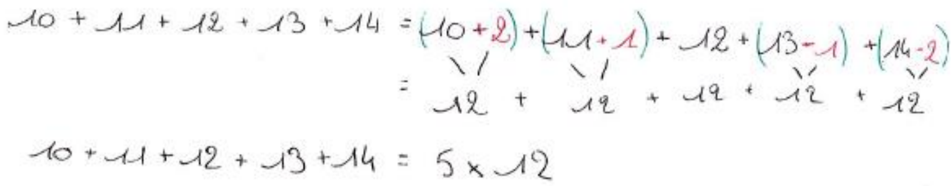


Figure 25 : regroupements à partir d'une somme commençant par 10

Autre méthode observée, toujours en partant de 10 :

$(n-2)+(n-1)+ n +(n+1)+(n+2)=$
$((n-2)+2)+((n-1)+1)+(n)+((n+1)-1)+((n+2)-2).$

En effet :

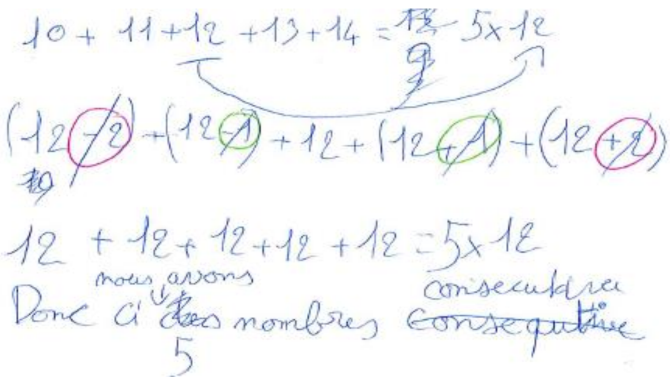


Figure 26 : autre regroupement envisagé dans le groupe 5

En regroupant les nombres, ils ont reconnu que la somme pouvait être simplifiée en utilisant le concept de la moyenne (sans savoir qu'ils l'utilisaient). Ils ont noté que les nombres sont autour de 12, ce qui les a conduits à écrire : 5×12.
Pour valider leur calcul, les élèves ont exprimé les termes de la somme de manière récurrente : 12 + 12 + 12 + 12 + 12.

Par exemple en partant de 9 :

- **regroupement de nombres** :

  $$(1 + 9) + (2 + 8) + (3 + 7) + (4 + 6) + 10 + 5$$

  Ils ont associé les nombres de manière à obtenir des paires dont la somme est constante. Cela a permis de visualiser que chaque paire totalise 10, ce qui a facilité le calcul.

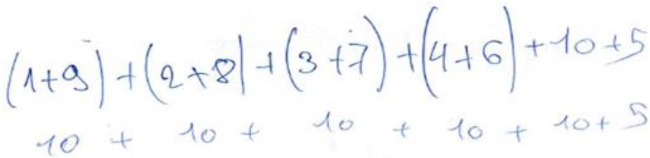


Figure 27 : regroupements par paires

- **utilisation de la symétrie :** en regroupant les nombres de manière symétrique, comme illustré dans :
  (10+1) + (9+2) + (8+3) + (7+4) + (6+5)
  Les élèves ont reconnu que chaque groupe de nombres additionnés donne le même résultat (11 dans ce cas). Cela a permis d'établir un motif et de simplifier le calcul final.

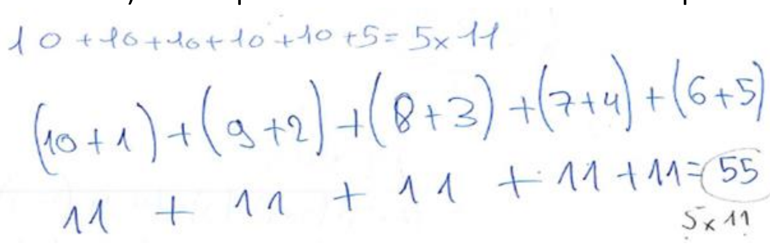


Figure 28 : regroupements de sommes égales à 11

En mettant ensemble toutes les sommes, les élèves ont pu conclure que la somme totale était égale à 55, en utilisant la propriété qu'ils avaient établie : 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = 55 et en confirmant que ceci correspondait à 5×11.

Ces méthodes ont permis aux élèves de développer des compétences en résolution de problèmes tout en renforçant leur compréhension des relations entre les nombres et des techniques d'addition efficaces.
À travers leurs travaux, les élèves ont appris à reconnaître des motifs / patterns dans les sommes de nombres entiers consécutifs en appliquant des méthodes spécifiques et en observant les résultats.

Somme de 10 nombres consécutifs :

Les élèves ont utilisé là encore plusieurs méthodes pour calculer la somme de 10 entiers consécutifs.

Par exemple en partant de 1 :
En explorant les sommes et les regroupements, les élèves ont commencé à reconnaître des motifs dans les résultats. Ici, pour la somme commençant par 1 ils ont repéré le motif 10 :

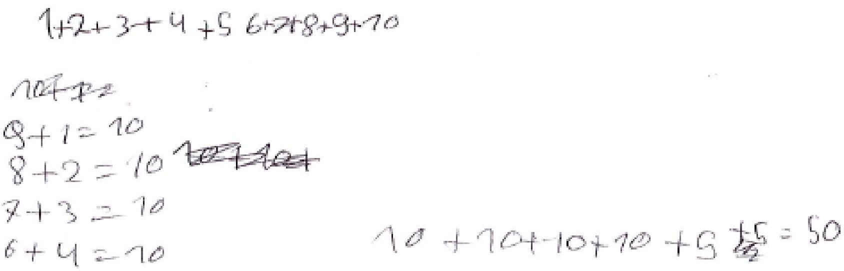

1+2+3+4+5 6+7+8+9+10
9+1=10
8+2=10
7+3=10
6+4=10
10+10+10+10+5 = 50

Figure 29 : regroupements de sommes égales à 10

Cela leur a permis de développer une intuition sur la manière dont les nombres interagissent lors de l'addition, renforçant leur compréhension des propriétés des nombres.

Par exemple en partant de 88 :

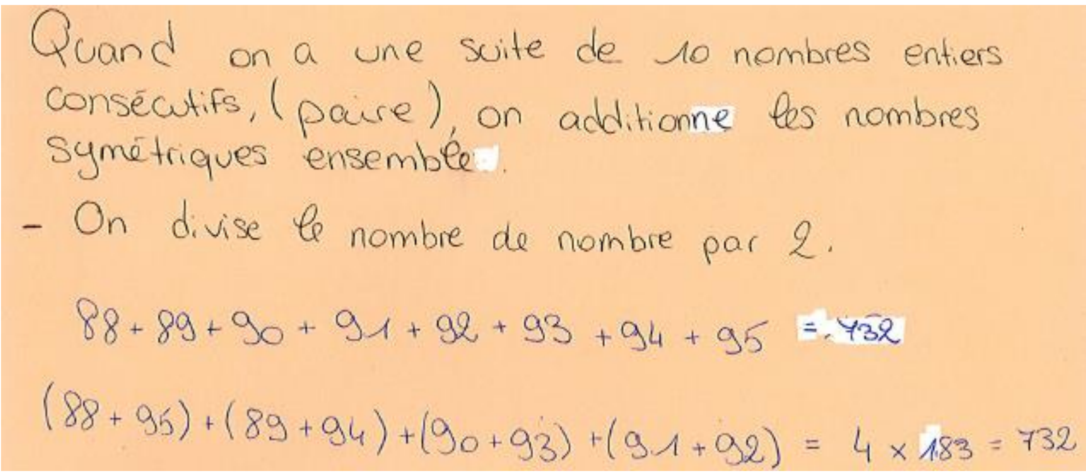

Quand on a une suite de 10 nombres entiers consécutifs, (paire), on additionne les nombres symétriques ensemble.
- On divise le nombre de nombre par 2.
88 + 89 + 90 + 91 + 92 + 93 + 94 + 95 = 732
(88 + 95) + (89 + 94) + (90 + 93) + (91 + 92) = 4 × 183 = 732

Figure 30 : synthèse du groupe 5 en fin de séance 2

Le raisonnement présenté dans le document extrait repose sur l'utilisation de la symétrie pour additionner des nombres entiers consécutifs. Voici les étapes clés du raisonnement :

– Les élèves commencent par définir une suite de 10 nombres entiers consécutifs, ici illustrée par les nombres de 88 à 95.

– Les élèves notent que lorsqu'ils ont une suite de nombres consécutifs, ils peuvent additionner des nombres qui sont symétriques par rapport à la moyenne de la suite : $(88 + 95)$, $(89 + 94)$, $(90 + 93)$, $(91 + 92)$. Chaque paire de nombres symétriques additionnée donne le même total, facilitant le calcul.

– Les élèves mentionnent qu'ils peuvent diviser le nombre total de nombres (dans ce cas, 10) par 2 pour déterminer combien de paires symétriques il y a. Cela souligne l'idée que chaque paire représente une somme constante.

– Le raisonnement se conclut par le calcul final : $4 \times 183 = 732$

Ce raisonnement illustre une méthode stratégique pour additionner des nombres entiers consécutifs en utilisant des propriétés de symétrie. Cette approche non seulement simplifie le calcul, mais aide également les élèves à comprendre les relations entre les nombres, renforçant ainsi leur compréhension des concepts mathématiques.

Groupe 6 : synthèse du travail de l'après-midi

Somme de 10 nombres consécutifs :

Le groupe a tout d'abord examiné la somme de 1 à 10. Dans un premier temps, en prenant exemple sur la méthode utilisée pour 5 nombres, ils ont essayé (sans l'écrire) de retrancher les termes entre eux afin d'obtenir plusieurs fois le nombre 5 :

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \text{ donne :}$$

$10-5=5$ $\quad$ $9-4=5$ $\quad$ $8-3=5$ $\quad$ $7-2=5$ $\quad$ $6-1=5$

Mais cette méthode qui ne permettra pas d'aboutir est abandonnée car les élèves comprennent qu'ils ne calculent pas la somme demandée. En explorant les regroupements possibles, les élèves ont commencé à reconnaître une constante dans les résultats. Ici le nombre 10 :

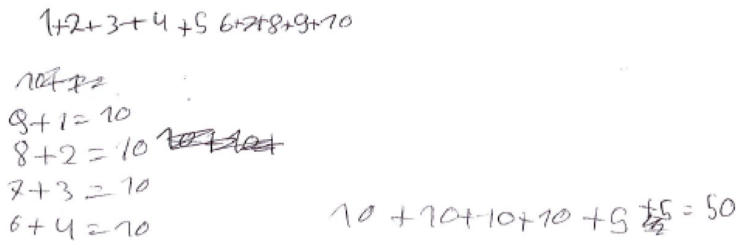
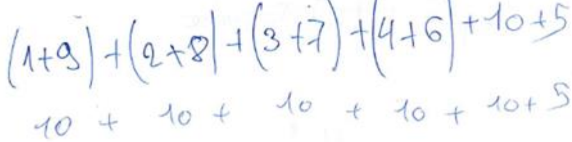


Figure 31 : extrait de la trace écrire du groupe 6

Cela leur a permis de développer une intuition sur la manière dont les nombres interagissent lors de l'addition, renforçant leur compréhension des propriétés des nombres. Par la suite, deux regroupements différents ont été élaborés. Les élèves ont associé les termes de manière à obtenir des paires dont la somme est constante (fig.32).

1er regroupement de termes :



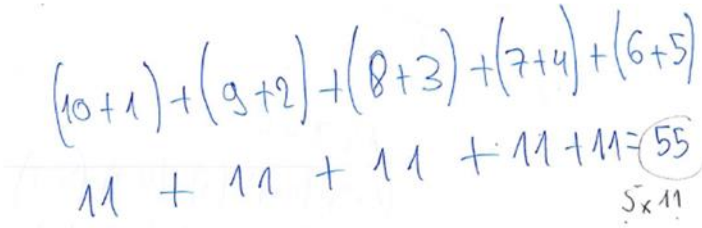
$(1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+10+5$

$10+10+10+10+10+5$

Figure 32 : Extrait de trace écrire du groupe 6

Les termes sont associés pour que leur somme soit égale à 10. Cette production finale est le produit d'un long cheminement. En effet, le traitement des deux termes isolés (10 et 5) a été source d'erreurs. D'une part, les élèves avaient oublié le 10 car ils se focalisaient sur les termes issus d'une somme. D'autre part, les élèves ne savaient pas quoi faire du 5 isolé. Certains proposaient d'ajouter 5 pour avoir un autre terme égal à 10 mais les autres s'y sont opposés.

2ème regroupement de termes :



$(10+1)+(9+2)+(8+3)+(7+4)+(6+5)$

$11+11+11+11+11=55$

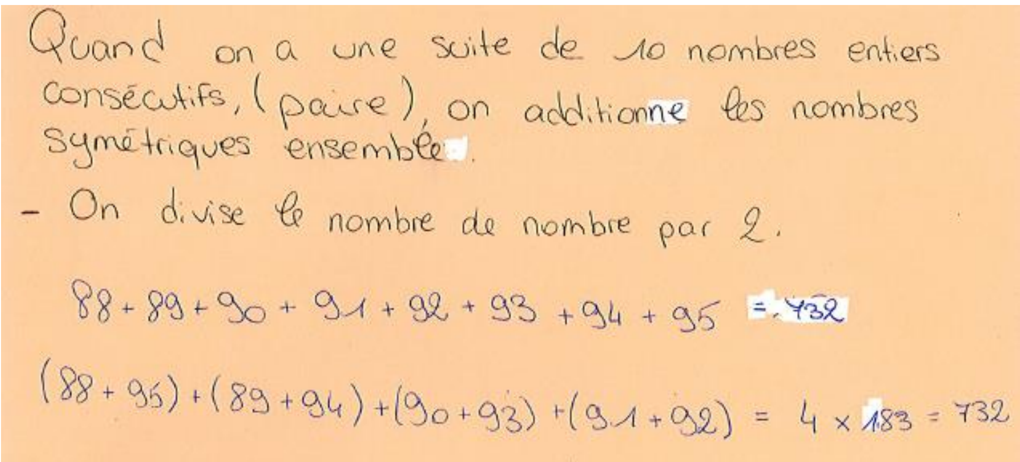
5×11

Figure 33 : trace écrire du groupe 6

Les termes en fig.33 ont été regroupés en associant les extrémités de la somme de manière symétrique : tout d'abord 1 et 10 puis 2 et 9, etc. Les élèves ont remarqué que chaque somme était égale à 11. Ils concluent que la somme est égale à 55 qu'ils écrivent également 5×11.

À cet instant, pour les élèves, la tâche est terminée. Une intervention de l'enseignante est nécessaire pour amener les élèves à identifier ce que représentent les nombres 5 et 11 dans le produit-résultat. Il s'agit pour l'enseignante d'aider les élèves à généraliser leur résultat. Le nombre 5 est identifié comme « la moitié du nombre de nombres », c'est-à-dire le nombre de sommes partielles effectuées, le nombre 11 comme le résultat de chaque somme partielle.

Sur proposition de l'enseignante, le groupe a ensuite étudié la somme commençant par 88 (fig.34).



Quand on a une suite de 10 nombres entiers consécutifs, (paire), on additionne les nombres symétriques ensemble.

- On divise le nombre de nombre par 2.

$88+89+90+91+92+93+94+95=732$

$(88+95)+(89+94)+(90+93)+(91+92)=4\times 183=732$

Figure 34 : trace écrire du groupe 6

Le raisonnement présenté dans ce document est similaire à celui utilisé pour la somme de 1 à 10. La première partie de la production (écrite en noir) est un essai de généralisation de la méthode utilisée précédemment. Cependant, dans la seconde partie (écrite en bleu), on remarque qu'ils ont oublié deux termes. Il s'agit donc de la somme de huit nombres entiers consécutifs, ce qui reste pertinent au regard de nos objectifs d'apprentissage.

Les élèves regroupent les termes aux extrémités de manière symétrique pour obtenir une somme constante. Ici, $88 + 95 = 89 + 94 = 90 + 93 = 91 + 92 = 183$

Ils obtiennent quatre sommes partielles valant 183. Ils concluent que la somme vaut $4 \times 183 = 732$.

Le nombre 4 correspond bien à la « moitié du nombre de nombres » puisqu'ils ont étudié une somme de huit nombres. Toutefois, on peut s'interroger sur le fait que les élèves aient bien reconnu en 4 la moitié du nombre de nombres dès lors qu'ils éprouvent la nécessité d'écrire les sommes partielles.

On aurait pu attendre un calcul plus direct du type :

$$88 + 89 + 90 + 91 + 92 + 93 + 94 + 95 = \underbrace{4}_{\text{Moitié du nombre de nombres}} \times \underbrace{(88 + 95)}_{\text{Somme des 2 termes extrêmes}} = 4 \times 183 = 732$$

Même si les élèves ne sont pas parvenus à rédiger une généralisation pour tout entier n, l'exemple générique ci-dessus constitue une étape intermédiaire encourageante. On peut supposer qu'en prenant appui sur ces exemples (sommes de 1 à 10 et sommes de 88 à 95), il sera possible d'amener les élèves à rédiger l'égalité suivante :

$$\sum_{1}^{10} n = \frac{10}{2} \times (n + n + 9)$$

Il sera ensuite possible d'étendre l'égalité à toute somme d'un nombre pair de nombres entiers consécutifs en prenant appui sur la somme de huit termes étudiée plus haut.

Analyse *a posteriori* du scénario

Nous exposons un fait saillant de la séance retrouvé dans plusieurs groupes (groupes 1, 4 et chez un élève du groupe 3) lors de la séance collective. Le calcul littéral arrive très vite (vrai/faux) et il est utilisé abondamment dans les groupes mais dans ses aspects syntaxiques en explorant les techniques algébriques sans revenir au sens. Par exemple l'expression $10\,x + 45$ n'est pas traduite en langage naturel et réinjectée pour prouver (conversion de registres non réalisée).

Sans une intervention extérieure, le groupe 4 restait sur une réponse *algorithmique* qui répond malgré tout à la consigne
« Comment trouver efficacement la somme de 10 entiers consécutifs ? ».
Un nombre pairement pair est divisible par 4.
Algorithme (fonctionne pour des nombres non pairement pairs (pour les élèves cela signifie que quand on le divise par 2 il est encore divisible par 2) :

- partager la somme en deux sous-sommes ;
- repérer le nombre médian de chaque sous-somme ;
- multiplier par 5 ces deux nombres et les additionner.

Ce qui était attendu n'était bien entendu pas un algorithme mais bien une propriété algébrique du type : « la somme de 10 entiers consécutifs égale $10x+45$ où x est le premier de ces 10 entiers ».

Intervention de l'enseignant qui les relance sur 8 entiers consécutifs bloquant ainsi l'algorithme proposé par le groupe puisque 8 est pairement pair.
$1+2+3+4+5+6+7+8$ donne deux sous-sommes $1+2+3+4$ et
$5+6+7+8$ sans nombre entier pouvant être considéré comme « nombre du milieu ».

Phase 1 : Alternative sur le Vrai/faux

Le vrai/faux initial apparaît redondant avec uniquement 3 nombres entiers consécutifs, la nouvelle version permet, dès le départ, de varier le nombre de termes et provoque un changement de point de vue sur une stratégie de type « trois fois le nombre du milieu » comme : $27 + 28 + 29 = 3 \times 27 + 3$

$$Vrai\ ou\ faux?$$

$$9 + 10 + 11 = 3 \times 9 \quad \text{ou} \quad 9 + 10 + 11 = 3 \times 10$$

$$2024 + 2025 + 2026 = 3 \times 2024 + 3$$

$$76 + 77 + 78 + 79 + 80 = 80 \times 5 - 10$$

$$22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 = 6 \times 25$$

Figure 35 : alternative de Vrai Faux

L'objectif du vrai/faux est de mettre en jeu une stratégie sans la dévoiler à la classe et d'éviter que $x - 1 + x + x + 1$ arrive trop vite comme lors de l'expérimentation. Nous avons fait le choix de propositions toutes vraies sauf la dernière (4^{e} fausse avec 6 entiers consécutifs).

Phase 2 : (15 min) Modification de consigne

Puisque les élèves n'ont pas tenu compte du destinataire, en l'occurrence une mathématicienne, il est apparu plus pertinent de modifier la consigne ainsi :

Comment trouver le plus rapidement possible la somme de 5 nombres entiers consécutifs ?
Vous devrez rédiger un message à destination d'un autre groupe d'élèves et ce message devra être suffisamment clair pour qu'ils puissent l'utiliser.

Figure 36 : nouvelle consigne

Phase 3 : (10 min) phase d'échanges des messages (ajoutée avant le bilan)

Le groupe valide ou invalide le message qu'il a reçu d'un autre groupe
En intervention de l'enseignant si le groupe ne décolle pas :
$42 + 43 + 44 + 45 + 46$
$97 + 98 + 99 + 100 + 101$
$31 + 32 + 33 + 34 + 35$
Prérequis : comment montrer qu'une proposition est vraie en maths ? qu'une proposition est fausse (contre-exemple) ?

Une intervention de l'enseignant est imaginée avec un support visuel (fig. en utilisant le schéma suivant si besoin :

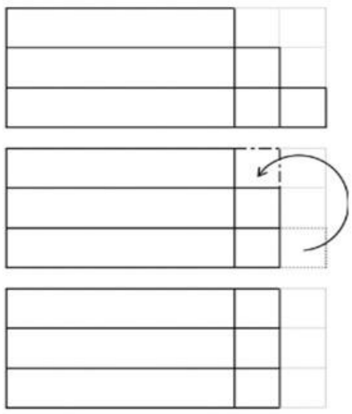


Figure 37 : schéma à usage de l'enseignant si nécessaire

Une manipulation qui conduit vers la preuve, un soutien. On peut demander de passer au langage algébrique en lien avec leur représentation.

Phase 4 : (15-20 min) Bilan intermédiaire (ajoutée)

L'enseignant expose au tableau les différentes règles (conjectures) et validations/invalidations.

2e heure de cours

Phase 5 : (15 min)

Comment trouver le plus rapidement possible la somme de 10 nombres entiers consécutifs ?

Vous devrez rédiger un message à destination d'un autre groupe d'élèves.

Analyse de la phase de bilan et d'institutionnalisation

Durant la séance du matin, le corrigé du Vrai Faux ne s'est pas passé comme le collectif l'avait initialement envisagé. L'idée, a priori, était juste de dire si chaque égalité était vraie ou fausse sans en dire plus. Le fait qu'un élève, spontanément dévoile oralement à la classe son introduction d'une variable x pour désigner le premier nombre, a conduit l'enseignante à écrire sous sa dictée une expression littérale que le lecteur peut apercevoir le contenu sur la partie gauche du tableau (fig. 38). Ceci a fortement impacté le travail développé ensuite par différents groupes de la classe qui a utilisé une lettre.
En fin de matinée, une première propriété concernant la somme de trois entiers consécutifs avec « le nombre du milieu » a été partagée par un groupe et réécrite au tableau par l'enseignante.

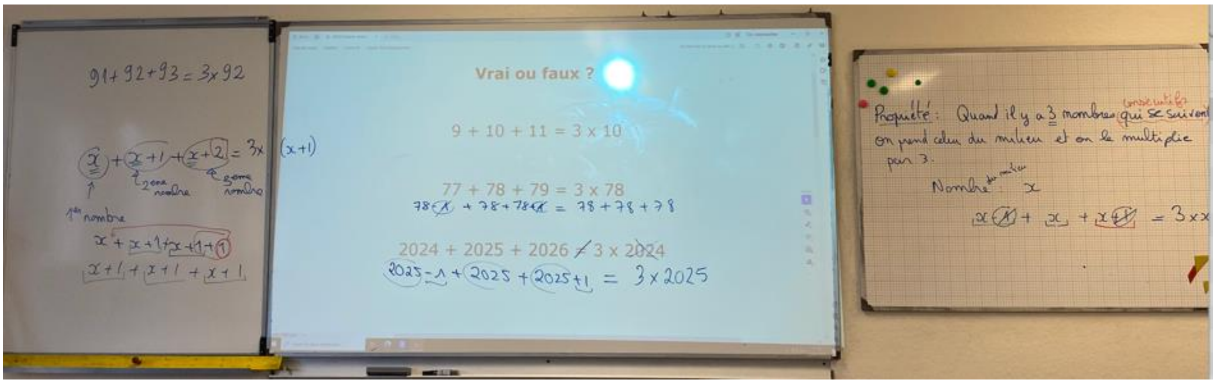


Figure 38 : Tableau en fin de matinée (première heure)

Durant la seconde heure, certaines productions de groupe ont été projetées au tableau. Celle du groupe 5 est projetée en premier afin de mener un questionnement avec la classe sur des aspects non généralisables de leur propriété. La présence de deux ?? et d'un « nuage » entourant l'expression « du milieu » en témoigne en fig.39)

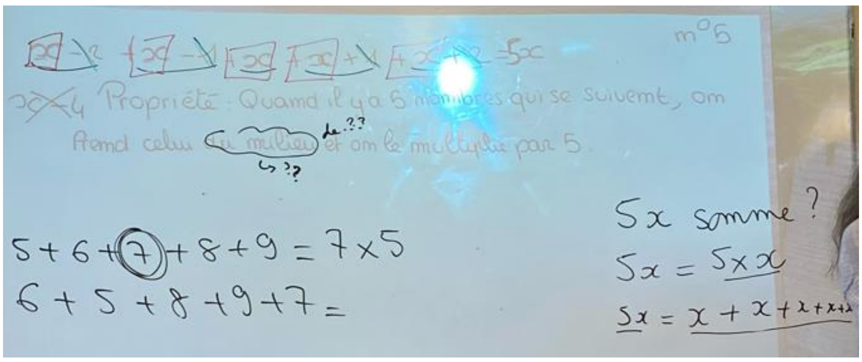


Figure 39 : Projection annotée de la production du groupe 5 au tableau

Ce temps de retour sur les productions a permis également de discuter du statut de $5x$ vu par certains élèves comme un produit et par d'autres comme une somme.

La seconde projection partagée à la classe est celle du groupe 4 ce qui permet à l'enseignante sur le tableau de droite de coconstruire avec la classe la conjecture 2 (fig. 40).

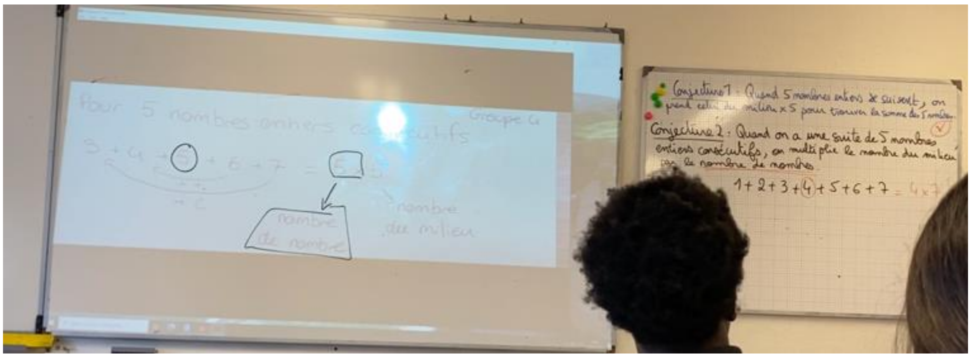


Figure 40 : Tableau au moment du partage la production du groupe 4

L'enseignante dialogue avec la classe sur différentes sommes d'entiers consécutifs et considère celle des entiers consécutifs de 1 à 7. Elle fait repérer le nombre de nombres de cette somme (7), fait identifier le nombre du milieu (4) et marque ensuite 4×7. Après avoir pointé qu'il y a un nombre impair de nombres, l'enseignante relance alors la classe sur la somme $2 + 3 + 4 + 5$. (fig. 41)

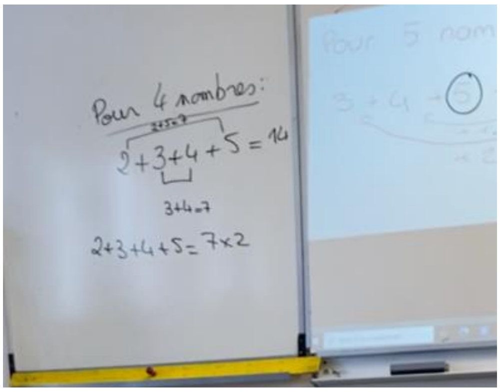


Figure 41 : Relance avec une somme de 4 entiers consécutifs

Cette phase l'amène à écrire une troisième conjecture (notée conjecture 3) et à la faire rectifier pour la valider avec la classe.

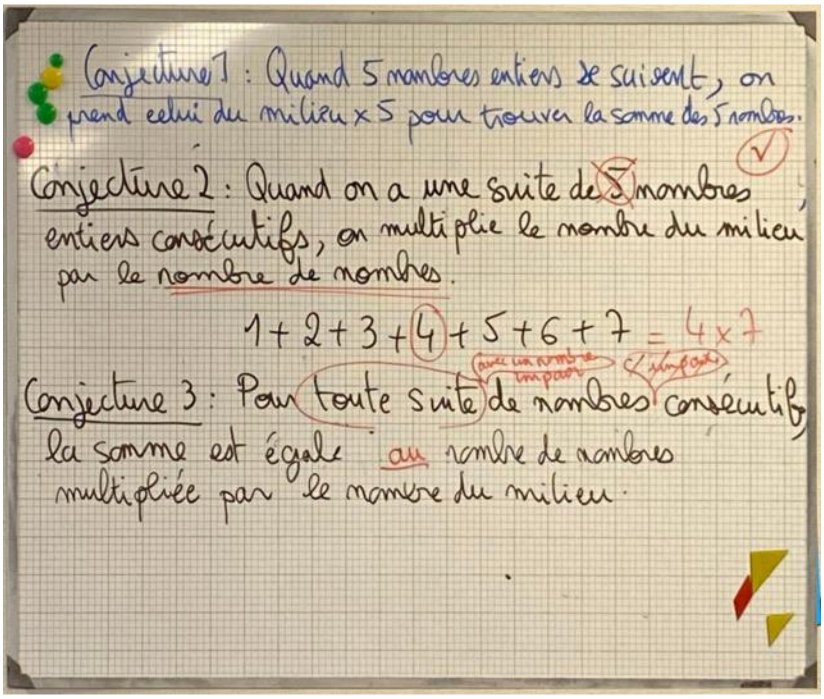


Figure 42 : Photo du tableau de droite, en fin de deuxième séance l'après-midi

Grille d'interventions possibles de l'enseignant

Phases	Déclencheur d'intervention	Interventions de l'enseignant	Effets attendus, buts
2	Difficulté liée au terme « consécutif »	Donner un exemple de trois ou quatre entiers consécutifs	Régler la question du vocabulaire sans entrer dans les détails
2	Certains élèves préfèrent partir sur 10 entiers consécutifs	Ok, les deux cas sont à traiter	Permettre au groupe de se poser la question dans le cas k pair et impair
2	Cas des 5 entiers consécutifs « il suffit de multiplier par 5 le nombre du milieu ».	Pouvez-vous le prouver ? Est-ce que ça marche avec 10 entiers consécutifs ?	Faire réfléchir sur l'énoncé d'une propriété et sa preuve.
2	Difficulté liée au terme « somme ».	P renvoie la question à la classe, qui peut expliquer ce qu'est une somme ?	Faire comprendre ce qu'est une somme
3	Des élèves s'arrêtent à un seul calcul numérique « $10 + 11 + 12 + 13 + 15 = 4 \times 12$ »	Le montrer et questionner la pertinence.	Montrer qu'un seul exemple peut suffire ou pas selon s'il est générique ou pas.
3	Un message est ambiguë sur la variable « on multiplie par 4 et on ajoute 6 » ou « on multiplie par 4 ».	Le montrer et questionner la pertinence	La formulation de l'élève ou du groupe est rectifiée, voir invalidée dans certains cas.
3	Texte en français ou formule littérale ou schéma ou matériel.	P peut encourager tout type de preuve et donc laisser vivre des schémas	L'élève avance une preuve non formelle mais élabore un raisonnement soutenu par une représentation, une manipulation, …
3	Message incompréhensible	P demande de reformuler oralement et aide à la reformulation. P propose un premier message compréhensible et demande s'il convient	La tournure de phrase est soutenue par P qui aide à clarifier le message proposé. L'élève explicite sa pensée oralement. L'élève s'empare du message et tente de le valider, il
3	Si un groupe ne décolle pas	P demande « Que vaut : $42 + 43 + 44 + 45 + 46$? Puis $97 + 98 + 99 + 100 + 101$? Et $31 + 32 + 33 + 34 + 35$?	Faire émerger une stratégie à partir d'exemples de sommes

5. Le mot de l'équipe de formation-recherche

Voici un retour sur les questions soulevées par la « Somme d'entiers consécutifs » lors de la Lesson Study.

Qu'est-ce qu'une preuve ?

Ouvrier Buffet (2017) s'appuie sur la définition de preuve de Balacheff (1987, p.148s) qui la décrit comme :

« *une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné (un débat est possible pour déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs). La démonstration est une forme particulière de restitution de la preuve. Et le raisonnement est une activité intellectuelle explicite ou implicite de manipulations d'informations pour, à partir de données, produire de nouvelles informations » (Ouvrier-Buffet, 2017).*

Balacheff distingue les preuves pour décider, qui se situent du côté de l'action. Il y a les preuves pour convaincre, elles plus tournées vers la théorie, et les preuves pour savoir.
Selon Ouvrier-Buffet, preuve et explications ne peuvent être dissociées car participent du processus de compréhension, l'explication pouvant aller au-delà de la preuve en jeu.
Les différentes fonctions de la preuve décrites par Ouvrier-Buffet sont :

- justifier ou réfuter
- expliquer,
- découvrir,
- systématiser,
- illustrer de nouvelles méthodes de déduction,
- défendre une définition, une axiomatique
- communiquer.

Question des niveaux de preuve

Selon Balacheff (1987) la preuve ne se réduit pas à une simple validation de résultats, mais constitue un processus central d'apprentissage, où l'élève construit, critique et valide des connaissances. Ses travaux s'intéressent entre autres aux caractéristiques langagières des preuves. Il propose une classification de la preuve en deux grands types :
les preuves pragmatiques (dans l'action) véhiculant des règles d'action et des théorèmes-en-acte non prouvés (validité de l'action interrogée, discours non forcément présent) ;
les preuves intellectuelles, nécessitant un changement de posture (passer à une posture théorique, être capable de décontextualiser, dépersonnaliser, détemporaliser).
Il distingue plusieurs niveaux de preuve chez les élèves. Ces niveaux sont organisés en une hiérarchie allant des validations empiriques aux preuves déductives. Le caractère générique étudié par Balacheff (1987, p. 163s) le conduit à proposer différents types de preuves : empirisme naïf, expérience cruciale / exemple générique / expérience mentale, calcul sur les énoncés, avec les définitions suivantes :
- Empirisme naïf : « tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion » (p.163) ;
- Expérience cruciale : « est un procédé de validation d'une assertion dans lequel l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaisse pour aussi peu particulier que possible » (p. 163) ;

- Exemple générique : « consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus » (p.164-165) ;
- Expérience mentale : "invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier » (p.165)

Le lecteur curieux pourra trouver des éléments complémentaires sur le diaporama de l'atelier de la journée IREM de Rouen de 2026 où sont analysées des données de cette Lesson Study en terme de niveaux de preuve.

Balacheff souligne que si les élèves privilégient souvent les preuves pragmatiques, plus intuitives, l'enseignement doit les amener vers des raisonnements plus abstraits et rigoureux. Un enjeu clé est la transposition didactique (Balacheff, 1999) : comment adapter les exigences de la preuve mathématique (comme en recherche) à un contexte scolaire, sans perdre de vue son rôle dans la construction du savoir. Travailler des situations-problèmes qui poussent les élèves à argumenter, débattre et justifier leurs réponses, plutôt que de se contenter d'appliquer des procédures est donc un vrai enjeu autour de la preuve.

La recherche préconise des activités où les élèves sont actifs, par exemple en débattant collectivement la validité d'une solution, pour développer une culture de la preuve. Nous espérons que notre expérimentation partagée dans ce cahier de Lesson Study aidera le lecteur à enclencher un tel travail autour de la preuve dans ses classes.

Travailler la preuve dans différents domaines

La somme d'entiers consécutifs se situe dans les domaines arithmétique et algébrique. De nombreuses situations amènent les élèves à produire des preuves variées (sur des exemples génériques, avec des contre-exemples, des arguments logiques), à les confronter, et à progresser vers des démonstrations plus formelles, en lien avec les programmes du secondaire. Si la preuve est souvent associée à la géométrie, l'arithmétique ou l'algèbre, d'autres domaines, comme les probabilités peuvent aussi être investis autour de la preuve. C'est le cas de la situation « L'affaire est dans le sac » (fig. 43).

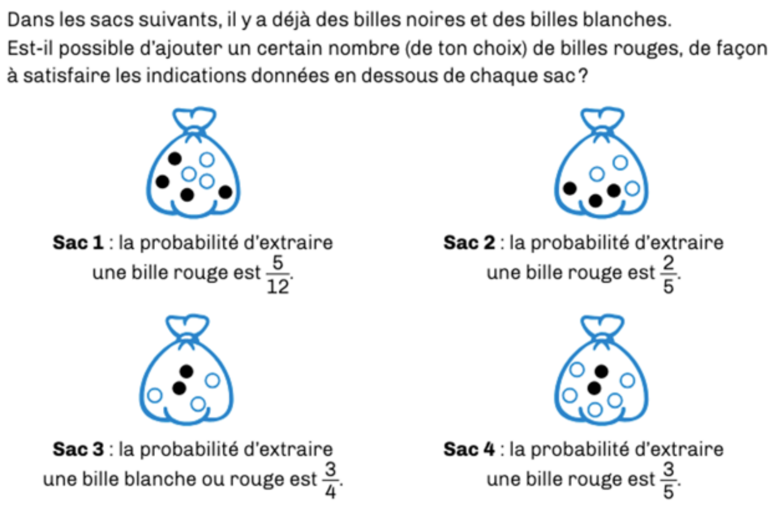


Figure 43 : « L'affaire est dans le sac », Éduscol (p.71)

Voici une analyse de solution où pour le sac 4, un raisonnement par l'absurde permet de prouver ici qu'il est impossible de le remplir pour obtenir la probabilité attendue.

Dans l'urne 1, l'effectif initiale de billes est 7 et $7 < 12$ avec $5 + 7 = 12$ donc il suffit d'ajouter 5 billes rouges.

Dans l'urne 2, il n'y a initialement que 6 billes et $6 > 5$. La probabilité ciblée vaut $\frac{2}{5}$ et correspond à l'événement « extraire une bille rouge ». Il s'agit donc d'introduire comme intermédiaire une fraction égale à 2/5 de dénominateur supérieur à 6. L'élève est conduit à envisager un effectif total de billes multiple de 5. La solution s'appuie sur l'égalité $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ et le fait que $10 - 6 = 4$ donc l'ajout de 4 billes rouges convient.

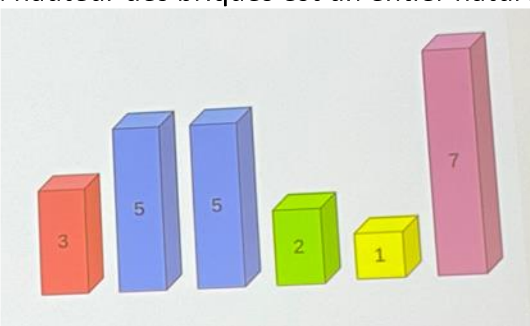
Dans l'urne 3, la probabilité attendue d'extraire une bille blanche ou rouge est $\frac{3}{4}$.
Il y a déjà 3 billes blanches et 2 grises donc sans ajout de bille route, la probabilité d'extraire une bille blanche ou rouge serait de $\frac{3}{5}$ ce qui n'est pas attendu. Donc il est nécessaire d'envisager d'ajouter des billes rouges. Appelons R l'événement « obtenir une bille rouge » et B « obtenir une bille blanche ». On cherche ici $P(R \cup B)$ où les deux événements B et R sont incompatibles donc $P(R \cup B) = P(R) + P(B)$
Soit x le nombre de billes rouges ajoutées, $P(R \cup B) = \frac{3+x}{5+x}$ et on a l'égalité $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, donc par identification, il suffit que $x = 3$. Donc ajouter 3 billes rouges convient.

Dans l'urne 4,
Pour cette urne, on raisonne par l'absurde en supposant qu'on ajoute x billes rouges, x vérifie $\frac{x}{7+x} = \frac{3}{5}$, soit $5x = 3(7 + x)$ et $2x = 21$ donc $x = 10{,}5$ ce qui est impossible car x est un entier (nombre de billes).
Donc notre hypothèse de départ est fausse et il est impossible de satisfaire la probabilité indiquée en ajoutant des billes rouges dans l'urne.

La question du prolongement du travail autour de la preuve

Voici un prolongement pertinent à travailler avec les élèves sur un temps plus long. Il s'agit du « jeu des deux tours » (fig.43), il s'inspire d'un exposé réalisé à Angers au congrès Math.en.JEANS[3] Grand Ouest en mars 2025.

Nous disposons de plusieurs briques à base carrée.
La hauteur des briques est un entier naturel.



L'objectif est de former deux tours « idéalement » de même hauteur.
Toutes les briques doivent être utilisées.

Figure 44 : énoncé du jeu des deux tours

[3] Il s'agit d'une association qui permet aux élèves d'école, de collège ou lycée de développer des recherches en mathématiques sur un sujet proposé par un chercheur qui les accompagne toute l'année. https://www.mathenjeans.fr/

Cette situation peut se rapprocher de celle étudiée dans ce cahier de Lesson Study si nous envisageons les hauteurs des briques comme nombres entiers consécutifs. Le lecteur trouvera en annexe des compléments sur des raisonnements qui peuvent être menés sur celle-ci.

Un des enjeux de ce type de recherche est de conduire une preuve de façon collaborative, tout en communiquant à d'autres (présentation en congres) des éléments de preuve comme le font les chercheurs en mathématiques.

6. Conclusion

En conclusion, la situation travaillée sur la somme d'entiers consécutifs permet le développement d'un travail riche et exigeant tant elle permet de dévoiler des enjeux de la preuve en mathématiques. Le travail sur la preuve est formateur de l'école au lycée tant elle permet de préparer les élèves à argumenter, à construire des raisonnements, à formuler des conjectures, et des propriétés tout en interrogeant leur validation.
Pour être efficace, cet enseignement doit s'inscrire dans une continuité entre l'école, le collège et le lycée où au fil du temps, la preuve a une place grandissante.
Nous invitons le lecteur à lire également le cahier de Lesson Study concernant la même situation réalisée cette fois au Cycle 3 : il pourra y repérer des différences d'approche dans le scénario mobilisé à ce niveau par un collectif d'enseignants et de facilitateurs.
Enfin, nous vous souhaitons de belles expériences autour de la preuve dans vos classes ou en formation d'enseignants.

Remerciements

L'équipe de formation-recherche tient à remercier non seulement les acteurs de terrain investis dans cette Lesson Study (élèves et enseignants impliqués dans la formation), mais aussi les acteurs de l'ombre sans qui ce type de formation n'aurait pas vu le jour, à savoir, particulièrement de l'Inspection Académique de Mathématiques de Normandie, l'Action du PIA3 100% IDT, ainsi que l'équipe de direction administrative du collège Picasso de St Etienne du Rouvray. Nous tenons à remercier les membres du laboratoire de recherche LDAR de l'Université de Paris-Cité, Takeshi Miyakawa de Université Waseda, Japon et du groupe « Activités » l'IREM de Rouen impliqués de près ou de loin dans Lesson Study.

Bibliographie

Balacheff, N. (1987). *Processus de preuve et situations de validation*. Educational Studies in Mathematics, 18(2), 147-176. https://hal.science/hal-01619264/document

Balacheff, N. (1999). *La transposition didactique à l'épreuve de la didactique des mathématiques*. In R. Noirfalise & M.-J. Perrin-Glorian (Eds.), Actes de la 11e École d'été de didactique des mathématiques (pp. 213-238).

Balacheff, N. (1999) Apprendre la preuve. In: Sallantin J., Szczeciniarz J. J. (eds.) *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle* (pp.197-236). Paris: PUF.

Balacheff, N. (2000). *Scénarios, modélisation et didactique des mathématiques*. In J.-L. Dorier et al. (Eds.), Actes de la 12e École d'été de didactique des mathématiques (pp. 3-20).

Clivaz, S., & Miyakawa, T. (2020). The effects of culture on mathematics lessons: an international comparative study of a collaboratively designed lesson. *Educational Studies in Mathematics*, *105*(1), 53-70. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09980-1

Masselin, B. & Mondragon, F. (2016), Probabilités-statistiques, cinq scénarios (3ème-2nde), IREM de Rouen Université de Normandie Rouen Le Havre.

MENJS (2024). La résolution de problèmes en mathématiques, Les guides fondamentaux pour enseigner. Eduscol.

Ouvrier-Buffet, C. (2017). La chasse à la bête – Une situation recherche pour la classe. Grand N, 100, 5-32

Ouvrier-Buffet, C. (2018). *Quels outils pour analyser l'activité de preuve en mathématiques à l'école élémentaire ? Propositions à partir d'une situation de recherche en CM1/CM2 (9-10 ans)*, Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM – 2018, pp. 391-408

Annexe

Voici un début de réflexion sur la situation du Jeu des deux tours.
Exemples
Avec les briques : $3, 4, 5$ et 6
Tour 1 : $3 + 6 = 9$ Tour 2 : $4 + 5 = 9$ Les deux tours font la même hauteur

Les élèves seront amenés à distinguer différentes configurations de suites de nombres.

Si le nombre de briques est un multiple de 4 : configuration de type 4k
Exemple : les briques sont 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 et 15.
Étape 1 :
Tour 1 : $8 + 15 = 23$ il reste à placer 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14
Tour 2 : $9 + 14 = 23$ il reste à placer 10 ; 11 ; 12 ; 13

Étape 2 :
Tour 1 : $23 + (10 + 13) = 46$ il reste à placer 11 ; 12
Tour 2 : $23 + (11 + 12) = 46$ tout est placé.

Il semble toujours possible de construire deux tours de même taille.
La preuve peut s'établir avec les tours de hauteurs : n ; $n + 1$; $n + 2$; $n + 3$
Tour 1 : $n + n + 3 = 2n + 3$ et Tour 2 : $n + 1 + n + 2 = 2n + 3$

Si le nombre de briques est un multiple de 4 +1 : configuration de type 4k+1
Exemple : les briques sont 5 ; 6 ;7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13.
Tour 1 : $5 + 13 + 7 + 11 = 36$
Tour 2 : $6 + 12 + 8 + 10 = 36$
Il reste la brique 9
On ne peut diviser le reste (ici 9) par 2 donc on prend le nombre qui s'en approche (ici 4 et 5) : si l'un des deux est dans la suite (ici 5), alors il est possible de construire deux tours d'un écart de 1. On obtient :

Tour 1 : $13 + 7 + 11 + 9 = 40$
Tour 2 : $6 + 12 + 8 + 10 + 5 = 41$
Les élèves peuvent conjecturer qu'il est possible de construire deux tours de même taille seulement si la suite commence par un nombre pair.
D'autres conjectures peuvent émerger pour des configurations $4k + 2$ et $4k + 3$.