Entrée dans deux Lesson Studies autour de la preuve.

Jordan Martin, Éric Minot, Blandine Masselin (LDAR),

Avec la collaboration de Catherine Turquetille, Cécile Ouvrier-Buffet (LDAR),

et du groupe « Activités – Lesson Study ».

100% IDT

INCLUSION, UN DÉFI, UN TERRITOIRE

Objectifs de l’atelier

- Réaliser une analyse collective du concept de preuve
- Aborder
  - les différents types de preuve (Balacheff, 1987)
  - les niveaux de preuves (Ouvrier-Buffet, 2017, 2018) en mathématiques.
- Etayage par des données issues de deux Lesson Studies sur une même situation
- Éclairage didactique.

La situation : Somme d’entiers consécutifs

À vous de jouer …

Si une classe vous attend, comment envisageriez vous de faire travailler la preuve à partir de cette situation ?

Mise en commun

Preuve, kesaco ?

Définitions de Balacheff (1987)

Preuve: une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné (débat pour déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs).

Démonstration : forme particulière de restitution de la preuve.

Raisonnement : activité intellectuelle explicite ou implicite de manipulations d’informations, pour, à partir de données, produire de nouvelles informations.

3 types de situations (avec des constats spécifiques)

- **Preuve pour décider** (plus du côté de l’action - *cas de l’étude de COB en école élémentaire*)
- **Preuves pour convaincre** (aspects théoriques)
- **Preuves pour savoir**

Définitions de Balacheff (1987)

Preuves pragmatiques (dans l'action) : règles d'actions, théorèmes en acte non prouvés (validité de l'action interrogée). Le discours n'est pas forcément présent.

Importance du caractère **générique**

Preuves intellectuelles (changement de posture) : décontextualiser, dépersonnaliser, détemporaliser

Types de preuves :
- empirisme naïf,
- expérience cruciale/ exemple générique/expérience mentale,
- calcul sur les énoncés

Contexte, énoncé et scénario 1D en LS

Contexte : Une classe de CM1-CM2 répartie en 7 groupes de 3 élèves

Énoncé :

Consigne 1 – Phase 1

Série 1

Calculer le plus rapidement possible la somme de 3 nombres entiers qui se suivent.
Écrire vos traces de travail sur la feuille du groupe.
Vous pouvez choisir l'ordre que vous voulez pour résoudre les séries.

4 5 6	23 24 25	769 770 771

Scénario : phases 1 à 4 de 14h40 à 15h30 et phase 5 de 15h45 à 16h

- 1ère phase (15 min) : Travail en groupe sur trois séries de triplets d'entiers consécutifs.
- 2ème phase (15 min) : Mise en commun
- 3ème phase (10 min) : Rédaction d'un message
- 4ème phase (10 min) : Validation des messages sur une nouvelle série de nombres

Pause (15min)

- 5ème phase (15 min) : Institutionnalisation (avec le tableau prévu)

Contexte, énoncé et scénario 2D en LS

<u>Contexte</u>: Une classe de 3ème en milieu d'année, d'un collège REP.

<u>Énoncé</u>:

Comment trouver le plus rapidement possible la somme de 5 nombres entiers consécutifs ? Ou encore de 10 nombres entiers consécutifs ?

Vous devrez rédiger un message à destination d'une mathématicienne et ce message devra être suffisamment clair pour qu'elle puisse l'utiliser.

$Vrai\ ou\ faux?$
$9+10+11=3\times 10$
$77+78+79=3\times 78$
$2024+2025+2026=3\times 2024$

<u>Scénario</u>: Deux phases de 50 min sont prévues.

- 1ère phase: - Vrai/Faux durant 15 min pour établir que la somme de 3 entiers consécutifs ordonnés est égale au triple de celui du milieu.
  - Recherche, en groupe, durant 35 min sur l'énoncé distribué. Il est attendu que les élèves écrivent au moins un message pour 5 entiers consécutifs.
- 2ème phase: - Un 1er bilan porte sur la somme de 3 entiers consécutifs, puis sur celle de 5 entiers consécutifs (30 min).
  - Recherche en groupe pour la somme de 10 entiers consécutifs (20min).

À vous de jouer…

Analyser les données issues des deux Lesson Studies avec la classification par niveau de preuve de Balacheff

Empirisme naïf

Expérience cruciale

Expérience mentale

Exemple générique

Catégories d'analyse de niveaux de preuve

Empirisme naïf : « tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion » (p.163)

Expérience cruciale : « est un procédé de validation d'une assertion dans lequel l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaisse pour aussi peu particulier que possible » (p. 163)

Expérience mentale : "invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier » (p.165)

Exemple générique : « consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus » (p.164-165)

Mise en commun

Exemple générique (1D)

40
+ 41 −1
42 −2
43 +2
4~~4~~5 +1
45

$$\begin{array}{r} 120 \\ 135 \\ \hline 255 \end{array}$$

On va arrondis les 3 premiers nombres à 40 et on va multiplier 45 X 3 se qui nous a donner 255.

Fig 26 et 27 Groupe de R

Empirisme naïf (2D)

Tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion : nombre du milieu x nombre de nombres .

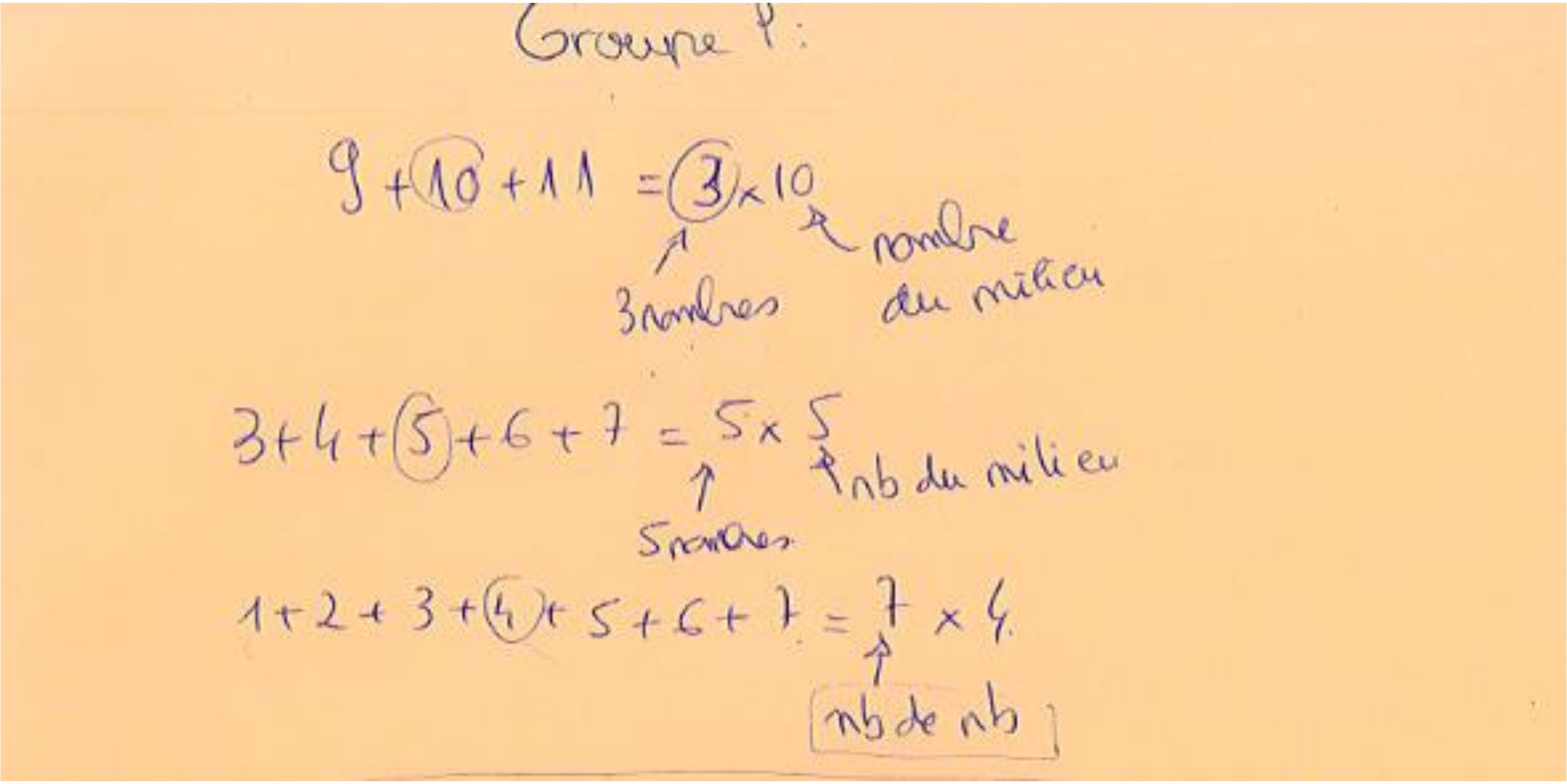


Figure 6 : Production gr1en fin de deuxième séance

Expérience mentale (2D)

« invoque l’action en l’intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier »

Quand on a des chiffres paires il n'y a pas de ~~chi~~ nombre
du milieu donc on va separer en 2 partie de même
nombre.
apres on va faire la somme et additioner les
resultat.

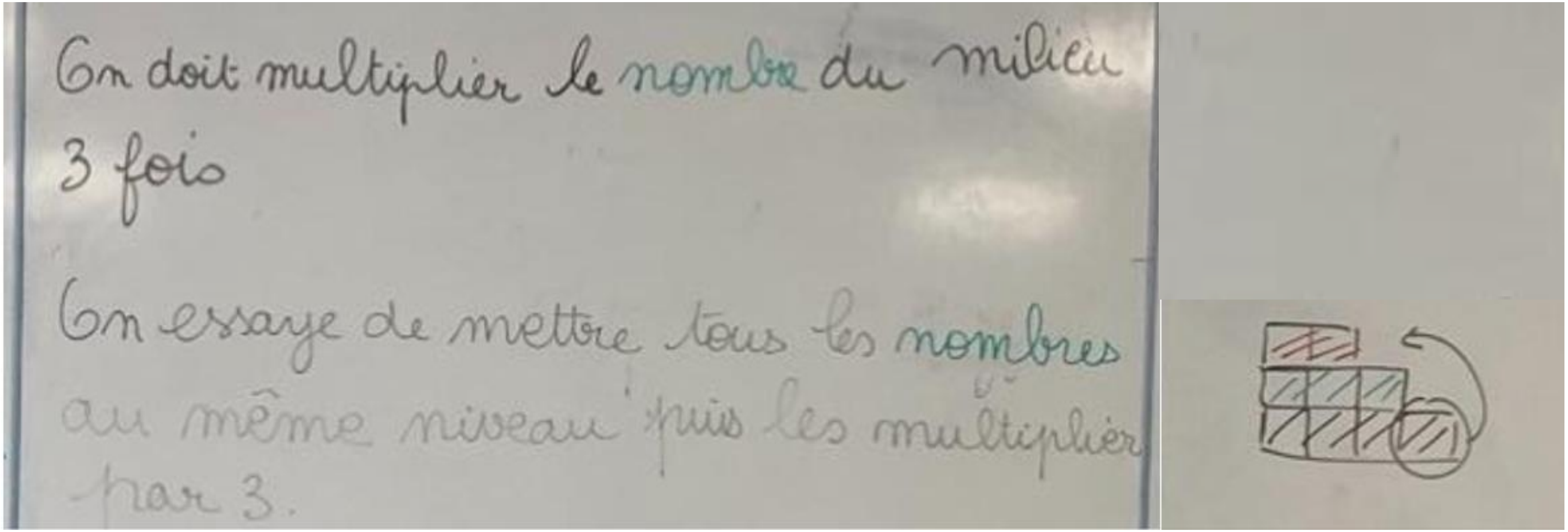
Expérience mentale (1D)

On peut essayer de maître toutes les chifre au même niveau puis les multiplier par 3. On peut déplacer une unité à chaque nombre sauf le plus petit.

23-24-25 47-48-49

Figure 14 : message final

Expérience mentale (1D)



Extrait du tableau final (Lesson Study 1D)

Expérience mentale (2D)

$6 + 7 + 8 + 9 + 10$

$_{+2} \quad {}_{+2} \quad \quad {}_{-2} \quad {}_{-2}$

$8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 8 \times 5$

$x + x+1 + x+2 + x+3 + x+4$

$_{-2} \quad {}_{+1} \quad \quad {}_{-2} \quad {}_{-2}$

$x+2 + x+2 + x+2 + x+2 + x+2 = x+2 \times 5$

5 nombres entiers qui se suive on doit mettre les autres egale a celui du milieu.

Figure 13 : Brouillon de S

Calcul sur les énoncés ? (2D)

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) \mid (x+5) + (x+6) + (x+7)$$
$$(x+8) + (x+9)$$

$+2$ $\quad$ $+1$ $\qquad\qquad$ $+2$ $\quad$ $+1$

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 \mid x + 5 + x + 6 + x + 7 + x + 8 + x + 9$$

$$= 5 \times x + 2 \qquad\qquad = 5 \times x + 7$$

$$= 5x + 10 \qquad\qquad = 5x + 35$$

$$= 10x + 45$$

Pas tout à fait une démonstration à cause des flèches ?

Expérience cruciale

Procédé de validation d’une assertion dans lequel l’individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d’un cas qu’il reconnaisse pour aussi peu particulier que possible » (p. 163) ;

Expérience cruciale (1D) validation

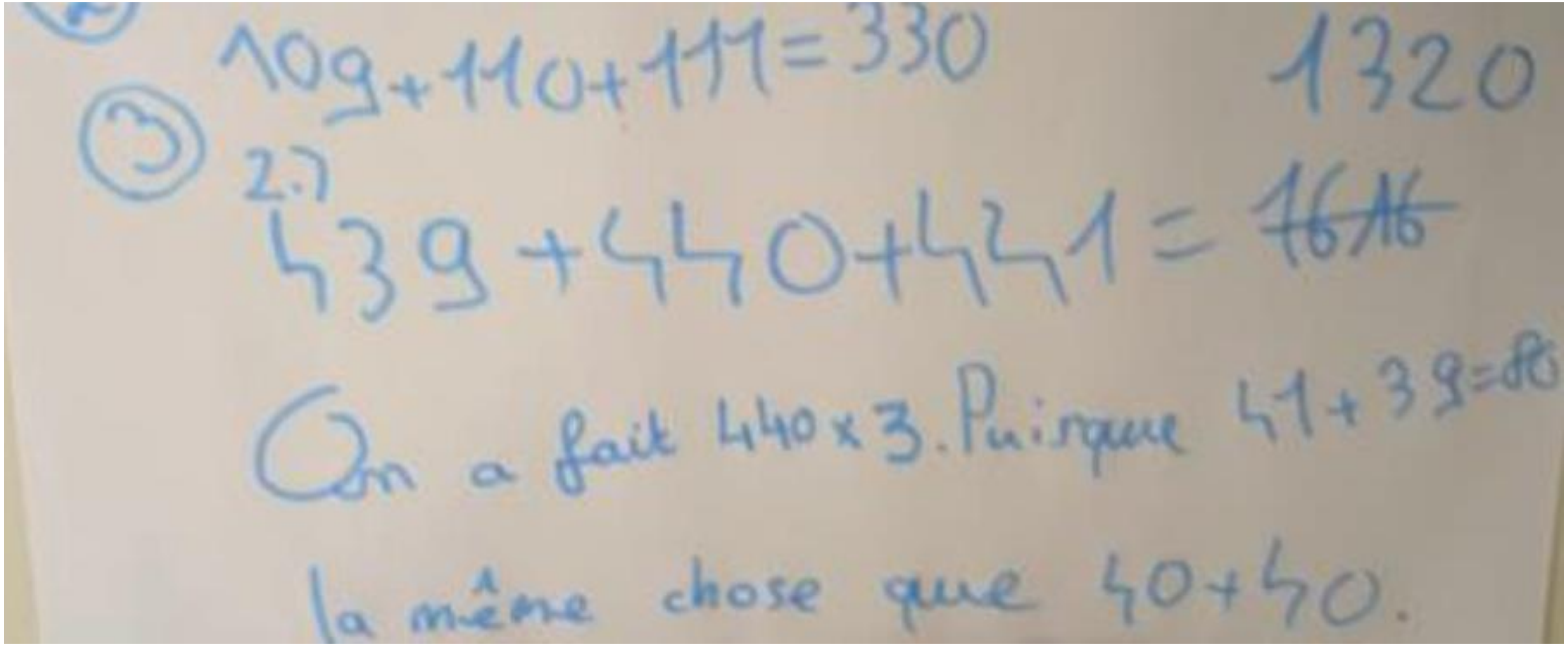
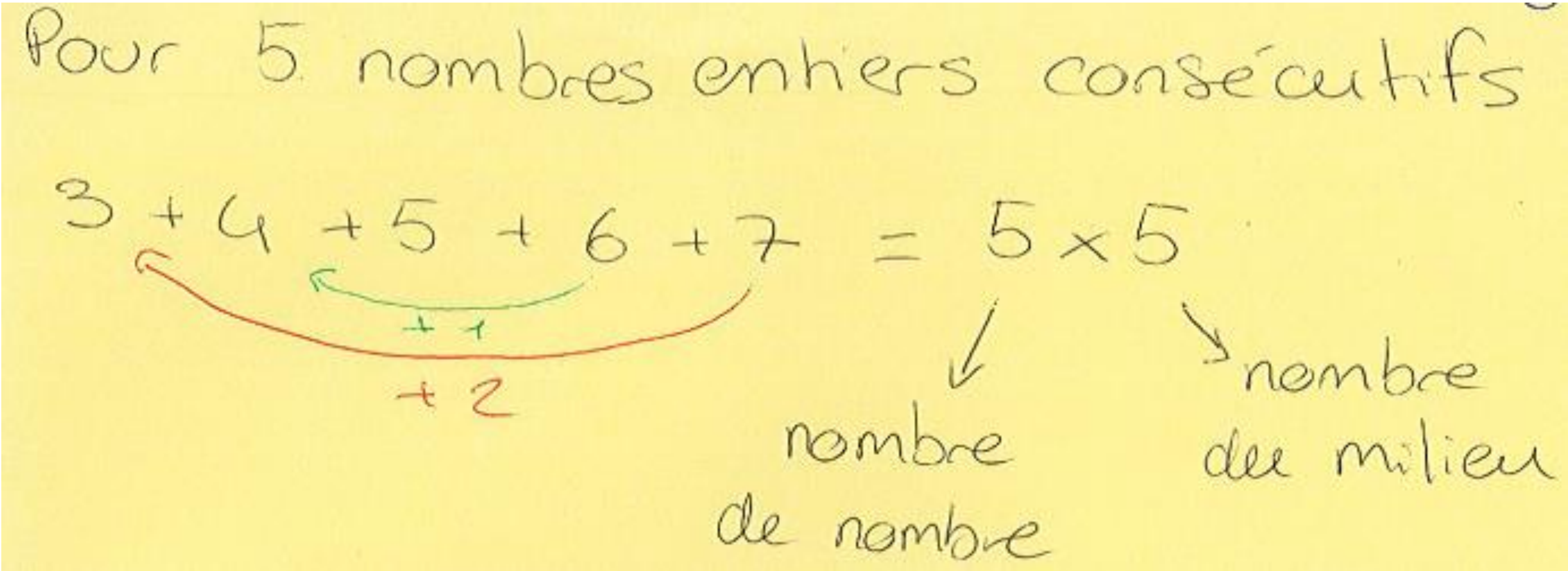


Fig 12: production d'un message (fin phase 3)

Exemple générique (2D) validation

« Consiste en l’explicitation des raisons de la validité d’une assertion par la réalisation d’opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d’une classe d’individus »



Exemple générique (2D) invalidation

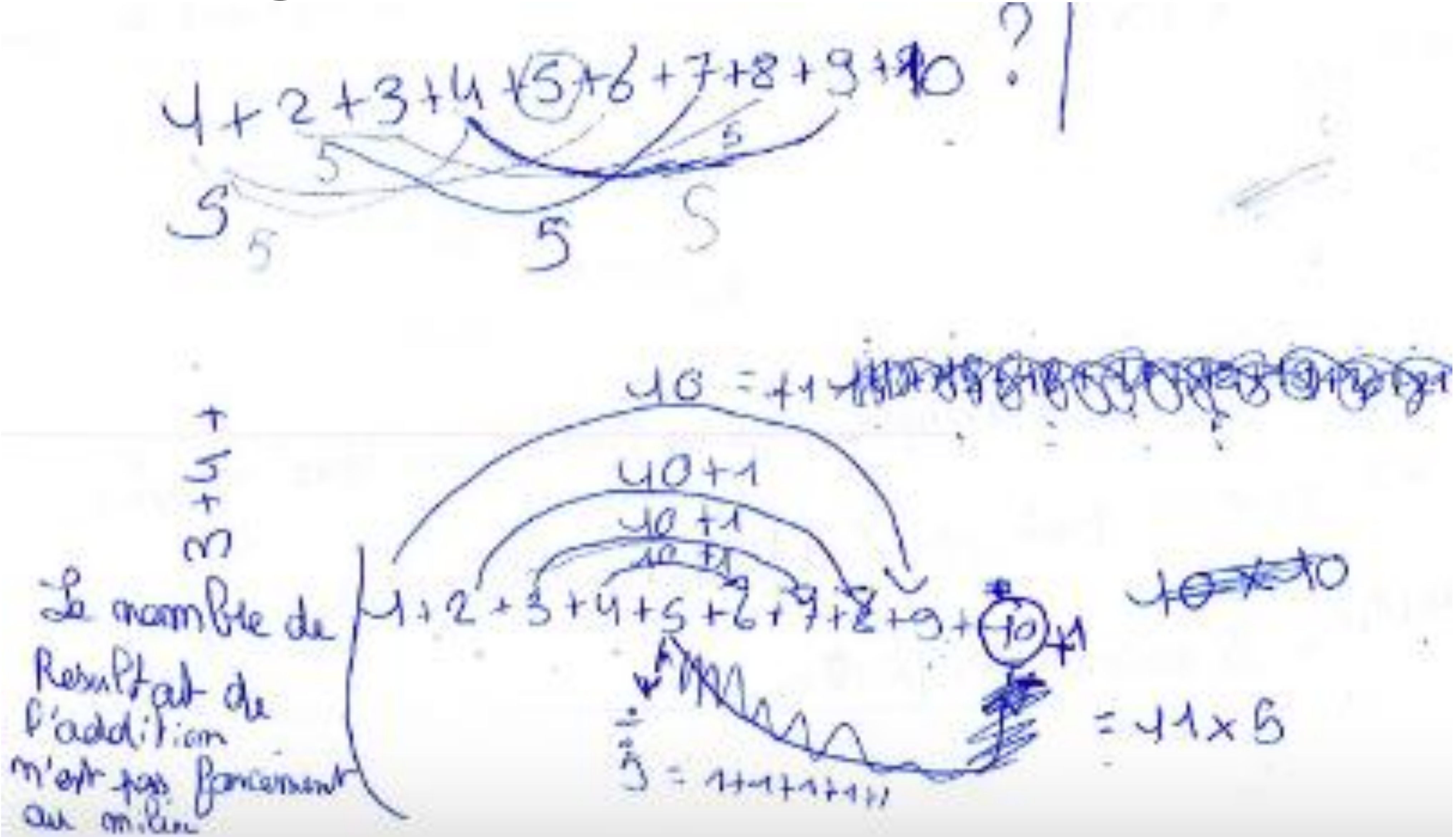


Figure 12 : Évolution du brouillon de K

Synthèse

Empirisme naïf

Expérience mentale

Calcul sur les énoncés

Expérience cruciale

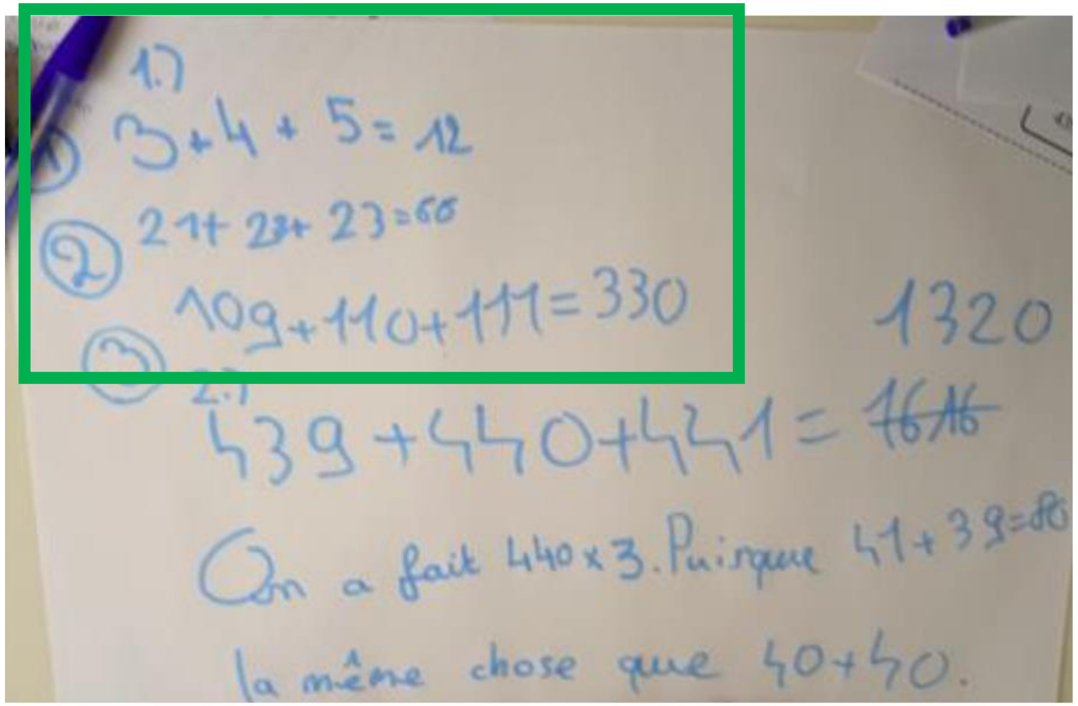
Démonstration

Exemple générique

Preuve pragmatique

Preuve intellectuelle

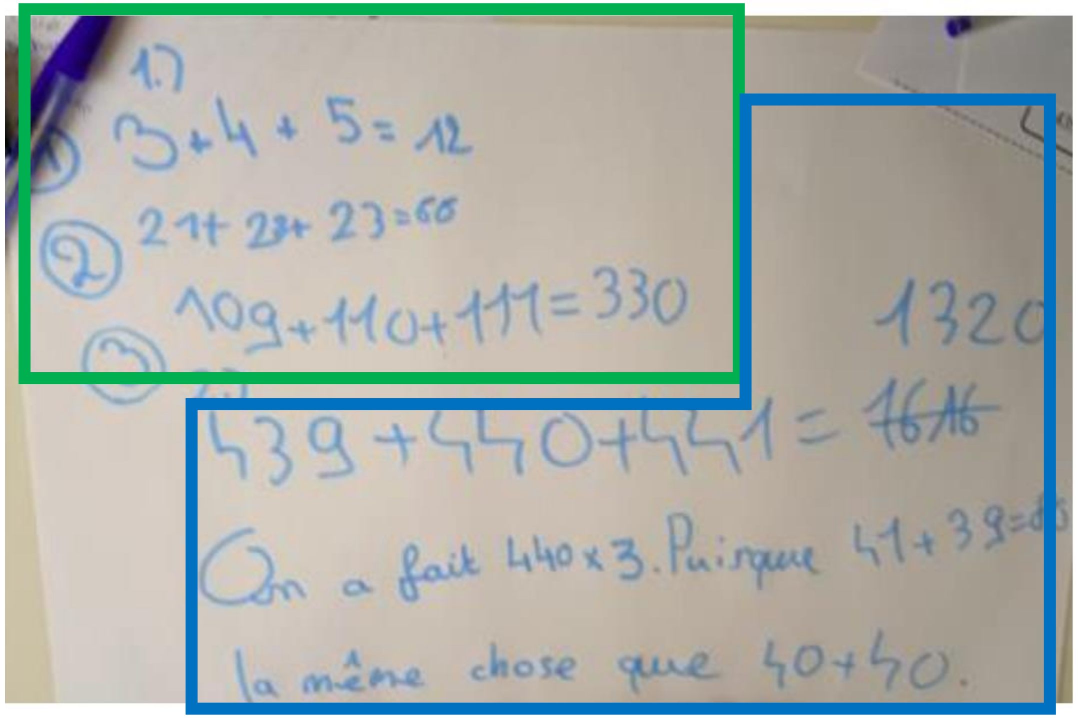
Empirisme naïf



Preuve pragmatique

Empirisme naïf

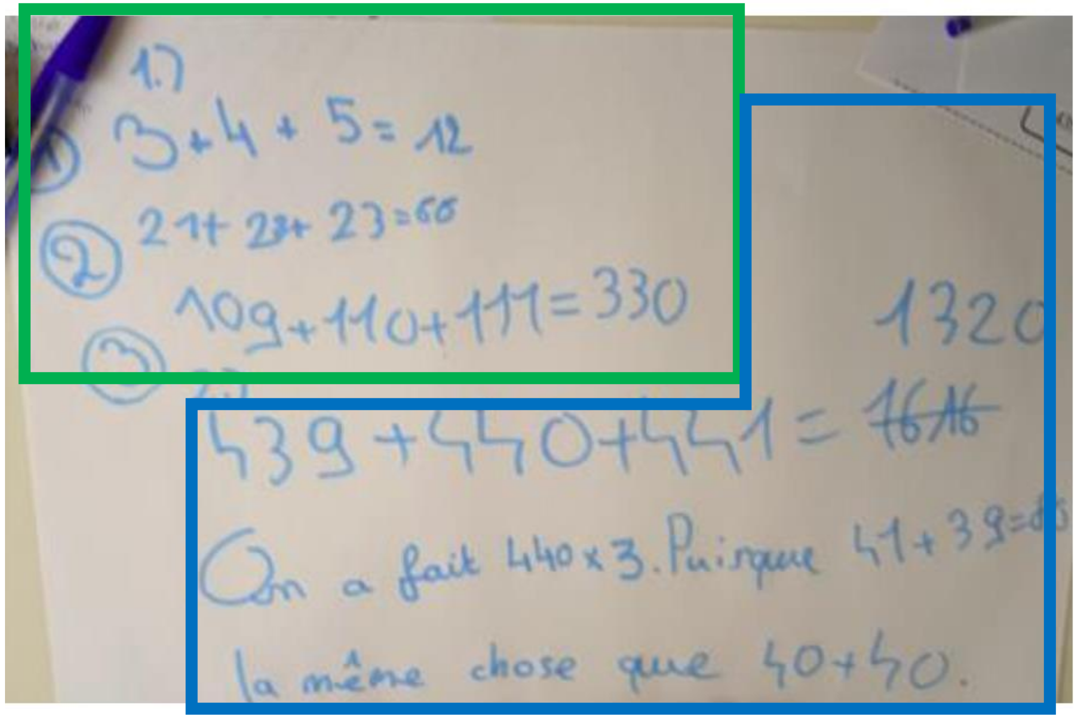
Expérience cruciale



Preuve pragmatique

Empirisme naïf

Expérience cruciale

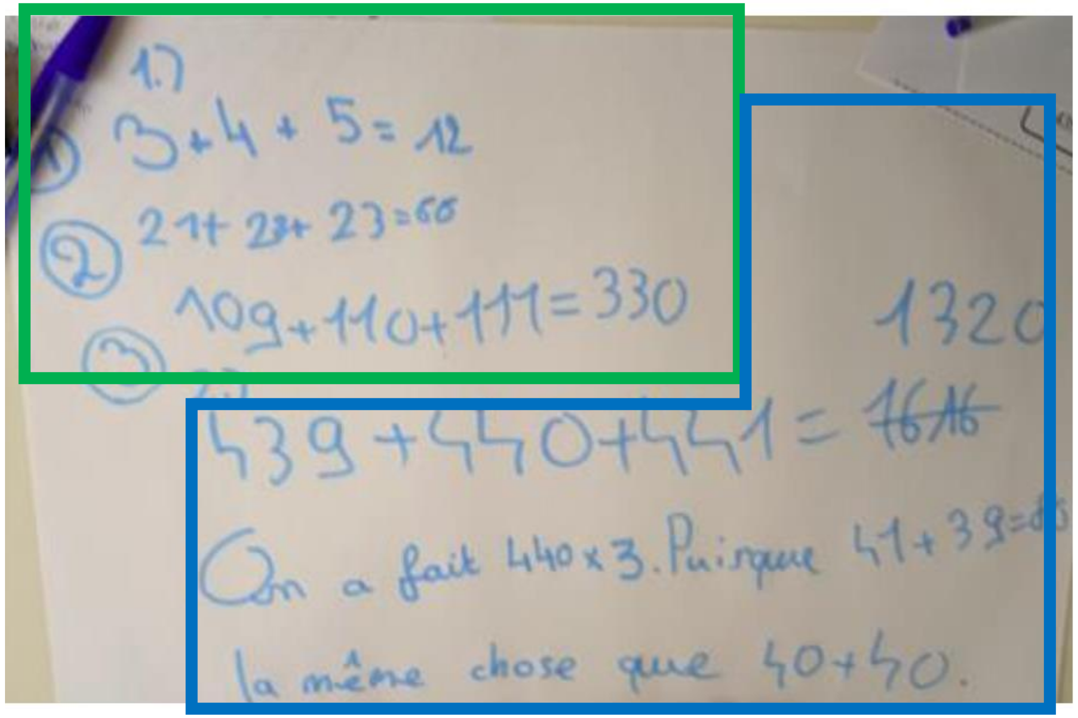


Exemple générique :

Preuve pragmatique

Empirisme naïf

Expérience cruciale



~~Exemple générique~~ : il manque les manipulations
$439 = 440 - 1$ et $441 = 440 + 1$

Preuve pragmatique

Empirisme naïf

Expérience cruciale

Exemple générique

Pour 5 nombres entiers consécutifs

$3+4+5+6+7 = 5 \times 5$

+1

+2

nombre de nombre

nombre du milieu

Expérience mentale

5 nombres entiers qui se suive on doit mettre ~~…~~ les autres egale a celui du milieu

Calcul sur les énoncés

$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) \mid (x+5) + (x+6) + (x+7) + (x+8) + (x+9)$

+2 +1 | +2 +1

$x + x+1 + x+2 + x+3 + x+4 \mid x+5 + x+6 + x+7 + x+8 + x+9$

$= 5 \times x+2 = 5x+10 \mid = 5 \times x+7 = 5x+35$

$= 10x + 45$

Démonstration

étapes de rédaction manquantes

Preuve pragmatique

Preuve intellectuelle

Pour aller plus loin dans l'étude de la preuve

Définition de Stylianides (2007-2016) avec un objectif de **définition souple, adaptable**.

*La **preuve** est un argument mathématique, une suite connectée d'assertions pour ou contre un objectif mathématique, aux caractéristiques suivantes :*

1. *elle utilise des énoncés acceptés par la communauté de la classe qui sont justes et disponibles sans justification ;*
2. *elle emploie des formes de raisonnement qui sont valides et connus pour leur portée conceptuelle par la classe ;*
3. *elle est communiquée avec des formes d'expression appropriées*.

Analyse :

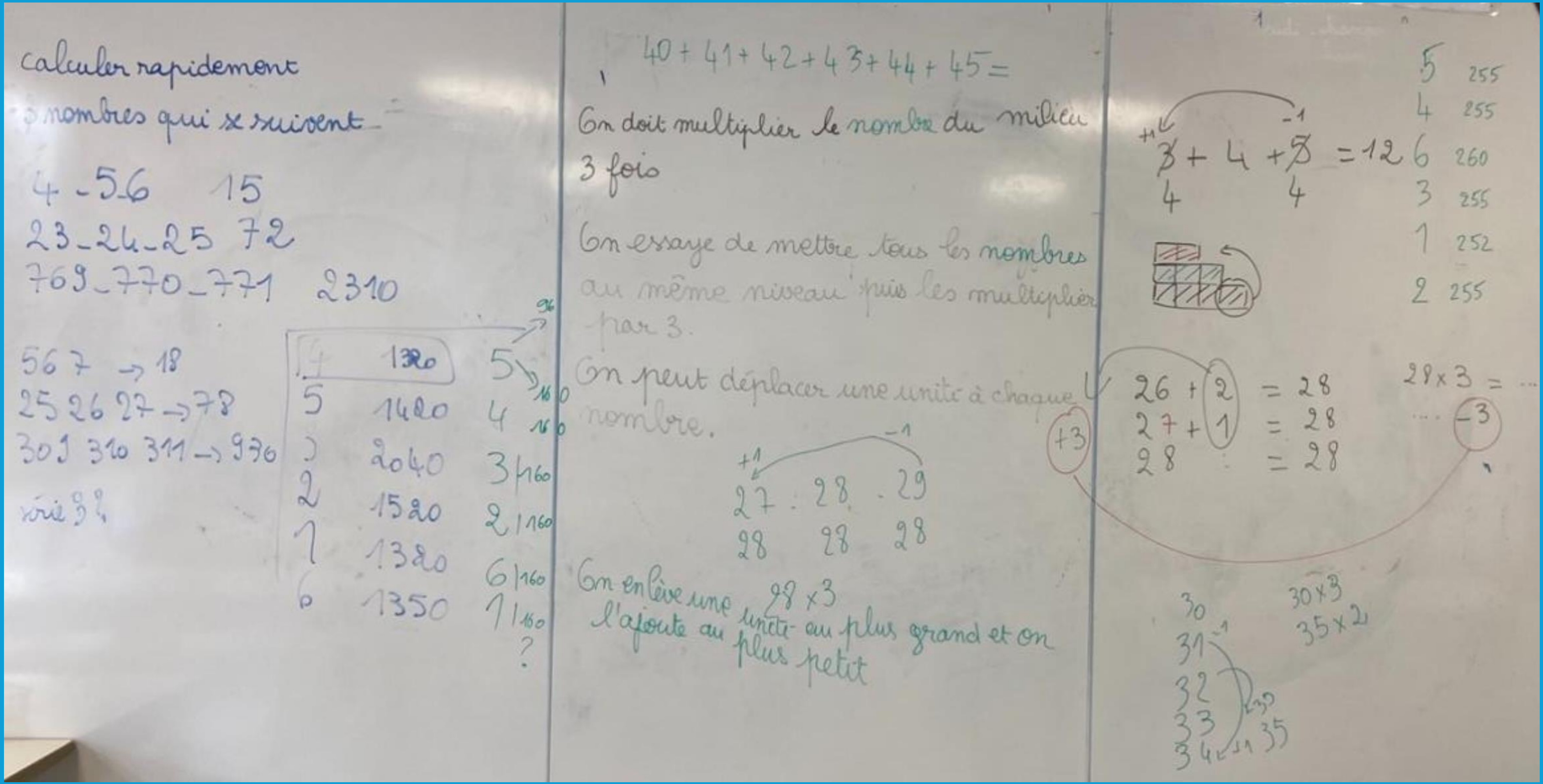
➔des **fondements** (définitions, axiomes, énoncés, théorèmes, règles de calcul établies…),

➔de la **formulation** (**modes d'argumentation**) (généralisation, déduction de cas particuliers, contre-exemples, par l'absurde)

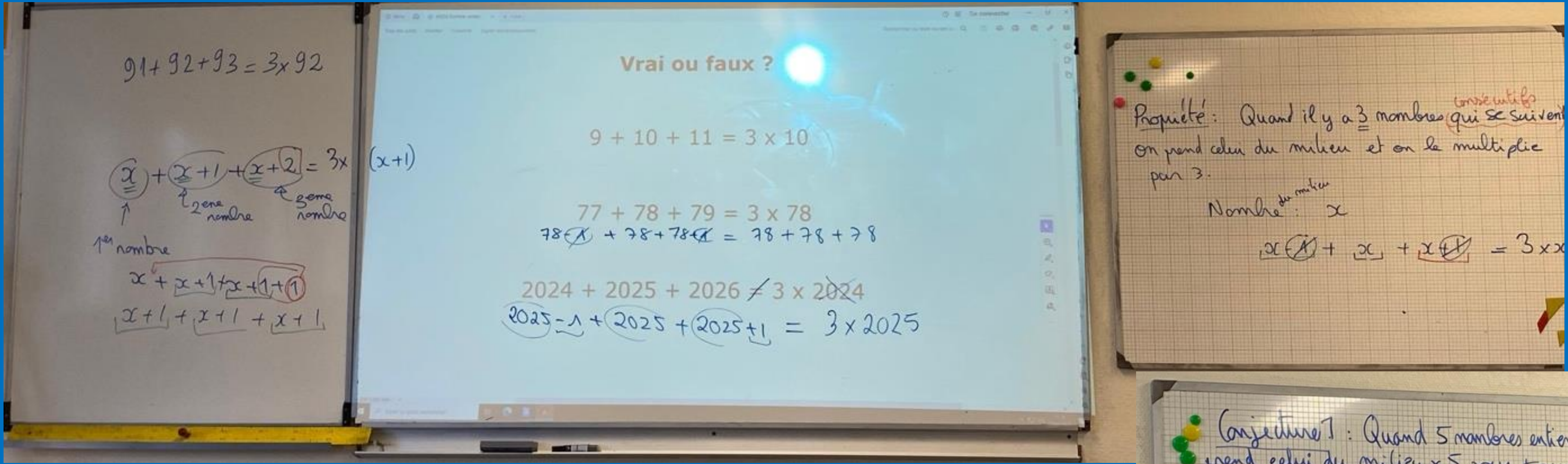
➔de la **représentation** (langage ordinaire, algébrique, diagrammes, etc)

➔de la **dimension sociale**

Tableau Lesson Study 1D



Tableaux Lesson Study 2D



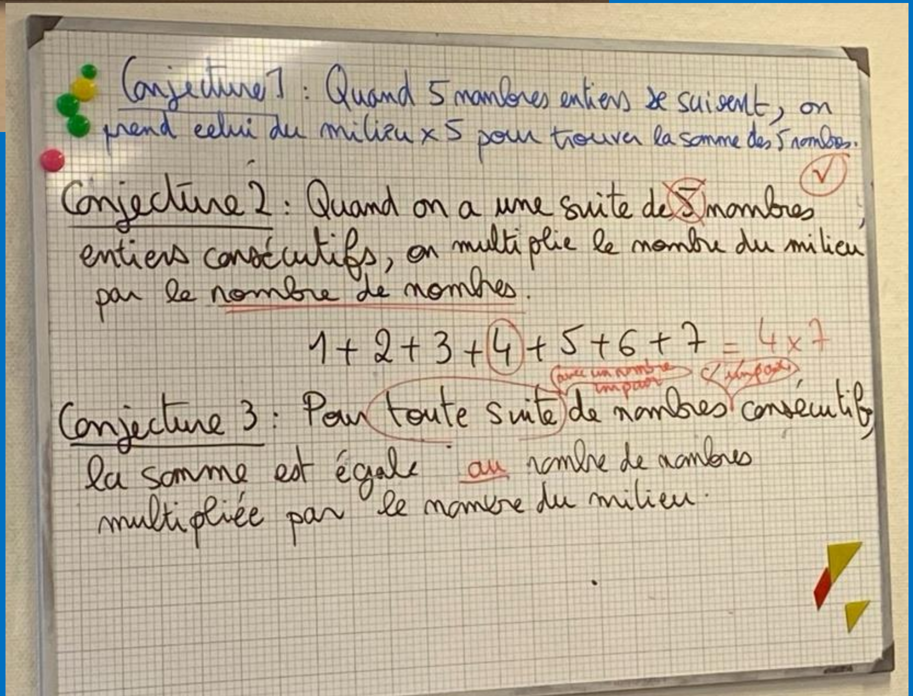
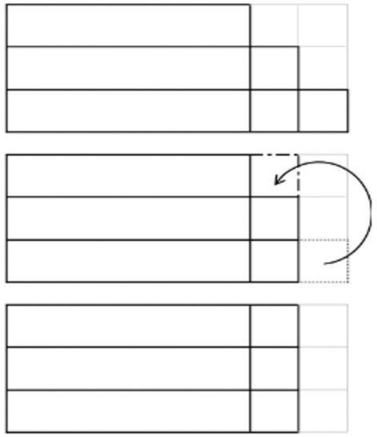


Tableau en fin de deuxième heure

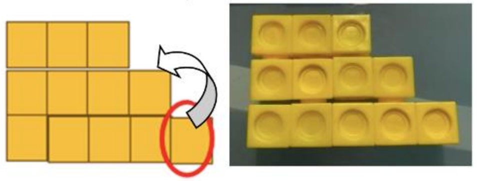
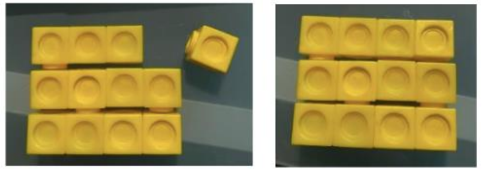
Conclusion : des rôles de l'enseignant autour de la preuve...

- Changer de niveaux de preuves :

  ne pas s'interdire de revenir à de l'empirisme naïf pour avancer
- Éviter les blocages avec des preuves pragmatiques



Interventions de l'enseignant imaginées en 1D

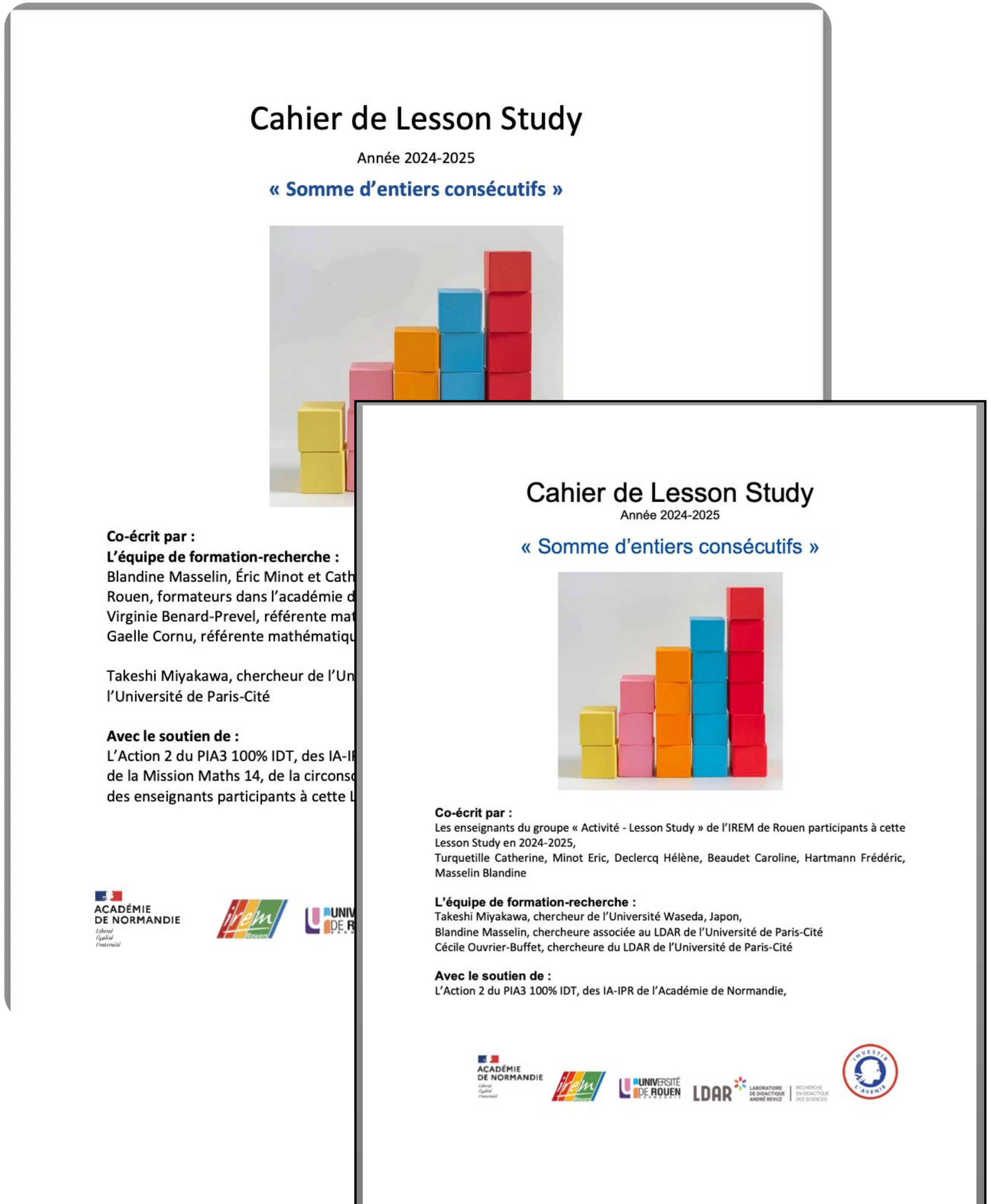
3	Un élève/groupe ne parvient pas à expliquer sa stratégie.	L'enseignant donne simultanément des cubes emboitables et la représentation suivante : 	Produire un message traduisant la manipulation réalisée (« j'enlève un, j'ajoute un »). 

3	Si un groupe ne décolle pas	P demande « Que vaut : 42 + 43 + 44 + 45 + 46 ? Puis 97 + 98 + 99 + 100 + 101 ? Et 31 + 32 + 33 + 34 + 35 ?	Faire émerger une stratégie à partir d'exemples de sommes

- Des preuves pragmatiques au service de la preuve intellectuelle

Quels apports ?

- Un enrichissement lié à la réflexion engagée dans le groupe Activités-LS autour de la preuve (projet LSa-DI, axe preuve) avec des chercheurs.


Cahier de Lesson Study

Année 2024-2025

« Somme d'entiers consécutifs »

Co-écrit par :
L'équipe de formation-recherche :
Blandine Masselin, Éric Minot et Cath
Rouen, formateurs dans l'académie d
Virginie Benard-Prevel, référente mat
Gaelle Cornu, référente mathématiqu

Takeshi Miyakawa, chercheur de l'Un
l'Université de Paris-Cité

Avec le soutien de :
L'Action 2 du PIA3 100% IDT, des IA-I
de la Mission Maths 14, de la circonsc
des enseignants participants à cette L

Cahier de Lesson Study

Année 2024-2025

« Somme d'entiers consécutifs »

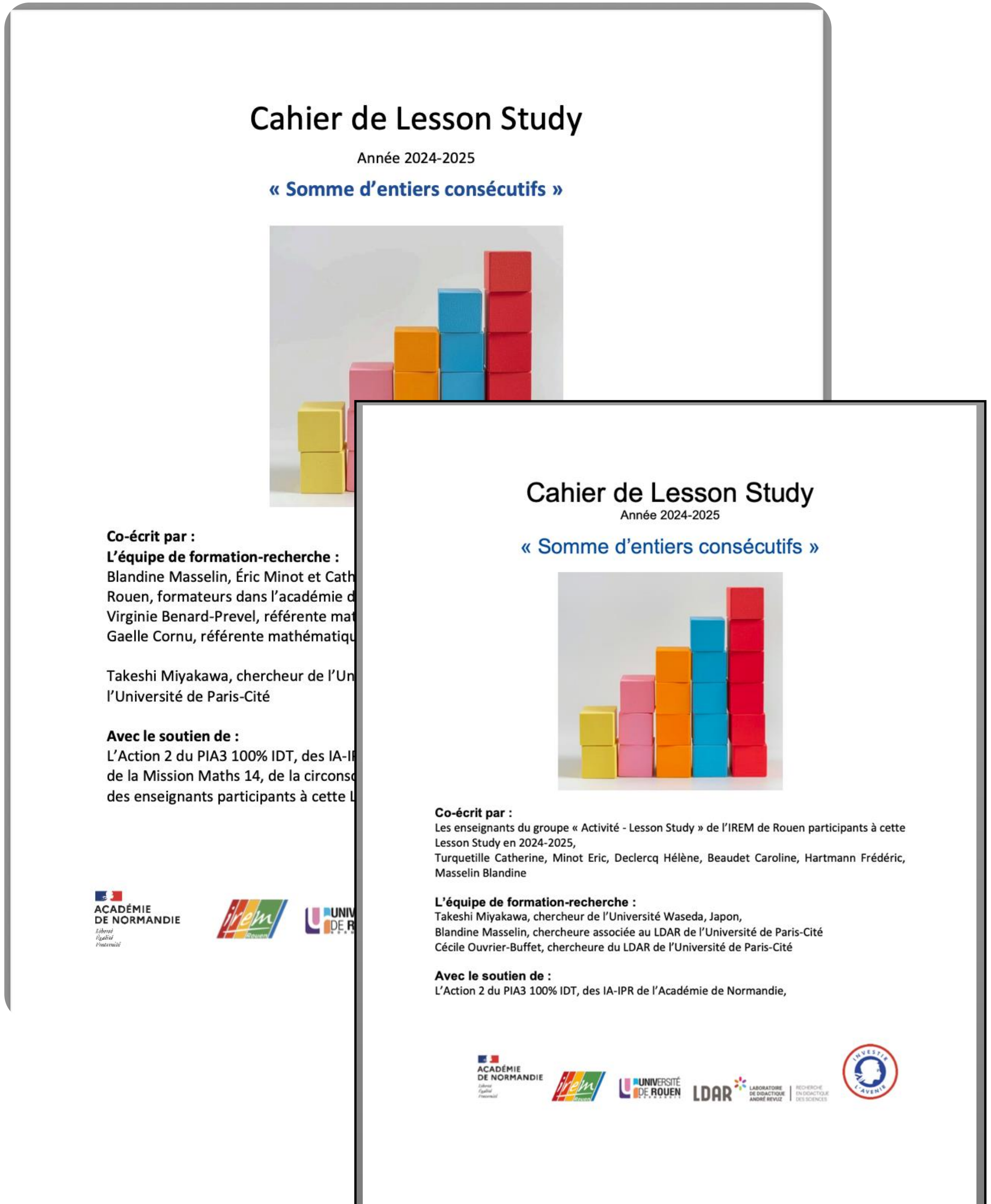
Co-écrit par :
Les enseignants du groupe « Activité - Lesson Study » de l'IREM de Rouen participants à cette Lesson Study en 2024-2025,
Turquetille Catherine, Minot Eric, Declercq Hélène, Beaudet Caroline, Hartmann Frédéric, Masselin Blandine

L'équipe de formation-recherche :
Takeshi Miyakawa, chercheur de l'Université Waseda, Japon,
Blandine Masselin, chercheure associée au LDAR de l'Université de Paris-Cité
Cécile Ouvrier-Buffet, chercheure du LDAR de l'Université de Paris-Cité

Avec le soutien de :
L'Action 2 du PIA3 100% IDT, des IA-IPR de l'Académie de Normandie,

Quels apports ?

- Un enrichissement lié à la réflexion engagée dans le groupe Activités-LS autour de la preuve (projet LSa-DI, axe de la preuve) avec des chercheurs.
- Les deux cahiers de LS offrent des analyses *a posteriori* et des pistes variées d'enseignement nourries par les deux expérimentations.



Quels apports ?

- Un enrichissement lié à la réflexion engagée dans le groupe Activités-LS autour de la preuve (projet LSa-DI, axe de la preuve) avec des chercheurs.
- Les deux cahiers de LS offrent des analyses *a posteriori* et des pistes variées d'enseignement nourries par les deux expérimentations.
- Question d'une progression sur la preuve reste à faire…

Bibliographie- sitographie

Balacheff, N. (1987). *Processus de preuve et situations de validation*. Educational Studies in Mathematics, 18(2), 147-176. https://hal.science/hal-01619264/document

Clivaz, S., & Miyakawa, T. (2020). The effects of culture on mathematics lessons: aninternational comparative study of a collaboratively designed lesson. *EducationalStudies in Mathematics*, *105*(1), 53-70. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09980-1

Ouvrier-Buffet, C. (2018). *Quels outils pour analyser l'activité de preuve en mathématiques à l'école élémentaire ? Propositions à partir d'une situation de recherche en CM1/CM2 (9-10 ans)*, Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM – 2018, pp. 391-408

Ouvrier-Buffet, C. (2017). La chasse à la bête – Une situation recherche pour la classe. Grand N, 100, 5-32

Cahier de Lesson Study « Somme d'entiers consécutifs », premier degré, IREM de Rouen (à paraître), site de l'IREM de Rouen
Cahier de Lesson Study « Somme d'entiers consécutifs », second degré, IREM de Rouen (à paraître), site de l'IREM de Rouen

Cahier de Lesson Study
Année 2024-2025
« Somme d'entiers consécutifs »

Co-écrit par :
Les enseignants du groupe « Activité - Lesson Study » de l'IREM de Rouen participants à cette Lesson Study en 2024-2025,
Turquetille Catherine, Minot Eric, Declercq Hélène, Beaudet Caroline, Hartmann Frédéric, Masselin Blandine

L'équipe de formation-recherche :
Takeshi Miyakawa, chercheur de l'Université Waseda, Japon,
Blandine Masselin, chercheure associée au LDAR de l'Université de Paris-Cité
Cécile Ouvrier-Buffet, chercheure du LDAR de l'Université de Paris-Cité

Avec le soutien de :
L'Action 2 du PIA3 100% IDT, des IA-IPR de l'Académie de Normandie,