Situation « Pylône brisé »

Mots clés :

Modélisation, équation, théorème-réciproque de Pythagore

Énoncé :

Pylône brisé

Un pylône de hauteur 40m est tombé. La pointe du pylône retombe sur le sol à 15m de la base du pylône.
Pour sécuriser le pylône, un soudeur doit découper au chalumeau le pylône au niveau de la cassure, à l'aide d'un camion nacelle.
On dispose d'un camion nacelle permettant d'atteindre une hauteur de $17m$.

Le camion nacelle sera-t-il suffisamment haut pour que le soudeur puisse effectuer la découpe ?

Niveau : Cycle 4 - 2nde

Objectifs :

- Résoudre un problème impliquant une modélisation
- Utiliser le théorème de Pythagore ou sa réciproque dans des conditions particulières
- Utiliser le calcul algébrique : mise en équation, développement, résolution d'équation

Intentions :

Inciter les élèves à prendre des initiatives de mathématisation et de résolution du problème.

Scénario possible (choisi par un collectif):

Il y a au moins deux procédures pour résoudre cette situation, tester si $17m$ convient ou chercher la hauteur de la cassure. Si un groupe utilise la première méthode, l'enseignant pourra le relancer sur le calcul de la hauteur de la cassure. On peut aussi faire le choix de lancer toute la classe sur le calcul de la hauteur de la cassure mais dans ce cas on laisse moins de latitude aux élèves.

Un temps court de lecture et de premier travail individuel pourra durer environ 5 min.
Il sera suivi d'une phase de clarification de la situation, avec projection de la photo du pylône au tableau. L'enseignant questionne la classe *: « La hauteur de la cassure est une distance inaccessible. Pourquoi n'est-ce pas le cas des 15m et des 40m du pylône ? »*. Cette question a pour but de donner du sens à l'énoncé en expliquant pourquoi certaines données sont manquantes et pas d'autres :

- les mesures au sol sont accessibles ;
- spécification technique du pylône de hauteur $40m$.

À ce stade, l'enseignant doit veiller à ne pas induire l'hypothèse du triangle rectangle. L'image a pour seul but de clarifier la situation.

Une troisième phase (compter 40 min) sera un travail en groupe de 4 élèves où dès le début de ce temps, l'enseignant précisera qu'il s'agit de rédiger une procédure détaillée pour le groupe (sur une feuille A4 par exemple).

On pourra, durant ces phases, utiliser des relances (voir extrait grille d'intervention de l'enseignant).

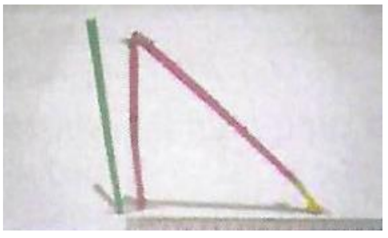
Déclencheur d'intervention	Intervention de l'enseignant	Effets attendus
L'élève réaliser un triangle quelconque ou équilatéral	P peut donner une paille à l'élève pour simuler le pylône.	L'élève peut réaliser une maquette. Il peut plier la paille, comme le pylône, en gardant une partie verticale par rapport à sa table. Il peut ainsi reconsidérer sa représentation et utiliser un triangle rectangle.
Le groupe ne voit pas comment représenter la situation.	P propose une vidéo qui permet d'accompagner une modélisation de la situation.	Les élèves s'autorisent à assimiler les deux parties du pylône à des segments et amorcent une représentation.
Après des tests manuels, un groupe d'élèves crée un fichier tableur. Ils testent des valeurs et annoncent une valeur approchée de la hauteur obtenue.	P pourra questionner le domaine de validité de la longueur cherchée, le pas choisi pour les tests effectués. P pourra demander si la valeur obtenue est une valeur exacte ou une valeur approchée ? Pour relancer les élèves, la recherche de la valeur exacte pourra être proposée comme un défi. En effet, pour la situation une valeur approchée suffisamment précise suffirait.	Faire distinguer aux élèves conjecture et preuve par calcul : la solution obtenue au tableur est une valeur approchée (qui peut en contexte être suffisante). La valeur exacte s'appuie sur une résolution d'équation.
Les élèves ont posé l'équation $x^2 + 15^2 = (40 - x)^2$ mais ne savent pas comment la résoudre.	P pourra inciter à développer $(40 - x)^2$ en revenant au sens du carré : $(40 - x)^2 = (40 - x)(40 - x)$ et réinvestir la double distributivité.	Permettre aux élèves de poursuivre la résolution de l'équation.

Extrait de la grille d'intervention de l'enseignant, « P » désigne l'enseignant.

Le dernier temps (environ 20 min) est la phase de bilan et d'institutionnalisation. Elle peut être organisée à la séance suivante et basée sur l'organisation décrite en p.3.

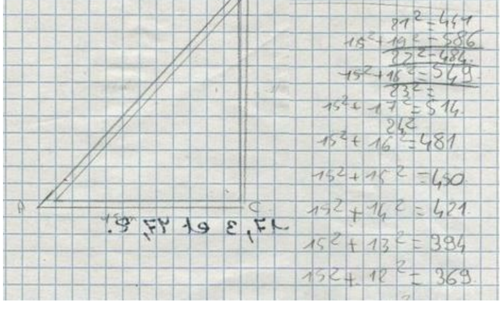
Productions d'élèves de 3ème

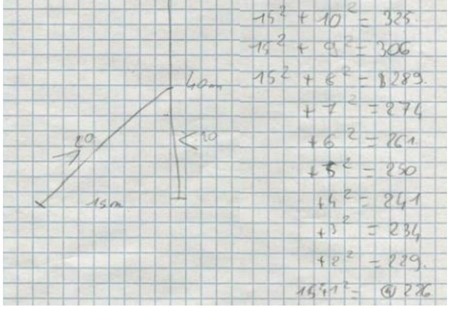
- **Réalisation d'une maquette avec des pailles**

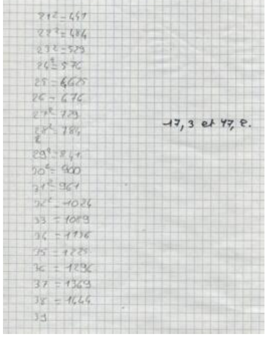


Une paille rouge de 40 cm est pliée (elle fait office de pylône brisé).
Le groupe positionne une paille verte de 17cm (pour la nacelle à côté de la partie verticale de la paille rouge. Puis il compare à l'œil les deux hauteurs atteintes.
Il conclut : « *Il semble qu'une nacelle de 17m peut convenir* ».

- **Tests de valeurs à la main avant usage d'un tableur**







- **Extrait d'une feuille de calcul possible au tableur**

	A	B	C	D	E
1	AB	BC	AC^2	AC	AB+AC
2	17	15	514	22,671568098	39,6715680975
3	17,1	15	517,41	22,746648105	39,8466481047
4	17,2	15	520,84	22,821919288	40,0219192883
5	17,3	15	524,29	22,897379763	40,1973797628

	A	B	C	D	E
1	AB	BC	AC^2	AC	AB+AC
2	17	15	=A2^2+B2^2	=RACINE(C2)	=A2+D2
3	=A2+0,1	=B2	=A3^2+B3^2	=RACINE(C3)	=A3+D3

formules saisies

Des pistes pour le bilan et l'institutionnalisation
Il prendra appui sur des synthèses de groupe sélectionnées par l'enseignant qui pourront être exposées à toute la classe avant de réaliser un bilan suivant :

<table>
<tr>
<td>Hypothèses de modélisation :

On suppose que la base pylône restée en place forme un angle droit avec le sol. Cette hypothèse permettra d'utiliser le théorème de Pythagore

Figure

Triangle rectangle</td>
<td>Résolution graphique :

Une représentation de la situation à l'échelle permet d'obtenir une valeur approchée de la hauteur.

Procédure avec utilisation du théorème de Pythagore
Idée de vérifier que la nacelle de $17m$ peut convenir.

Recherche de la hauteur de la cassure :
Une valeur approchée de la hauteur peut être trouvée avec un tableur.
Quelques lignes du tableur sont alors présentées.</td>
<td>Avec le calcul algébrique

En appelant x la hauteur* de la cassure et en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle, on est amené à résoudre
$x^2 + 15^2 = (40 - x)^2$
$x^2 + 225 - x^2 = 1600 - 80x + x^2 - x^2$
$225 = 1600 - 80x$
$225 + 80x = 1600 - 80x + 80x$
$225 - 225 + 80x = 1600 - 225$
$80x = 1375$
$\frac{80}{80}x = \frac{1375}{80}$
$x = \frac{1375}{80}$
$x = 17{,}1875m$
Conclusion : On peut imaginer que le soudeur fait $1m80$ donc dans la nacelle il pourra faire la découpe.</td>
</tr>
</table>

***** C'est un choix de modélisation : on pourrait considérer que $\boldsymbol{x}$ est la longueur de la partie du pylône cassée touchant le sol.

À propos de l'énoncé

On peut explorer des variables didactiques et proposer plusieurs énoncés. Le suivant permet de bloquer la stratégie qui consiste à tester si la hauteur de $17m$ convient.

Un pylône de hauteur 37 m est tombé, et la pointe retombe sur le sol à 15 m de la base du pylône. *Photos (celles de l'énoncé p.1)* À quelle hauteur doit monter la nacelle ?

La solution, x =572/37, est non décimale, ce qui explique une hauteur du pylône de 37 m au lieu de 40 m Un scénario incluant une phase intermédiaire avec la projection d'une vidéo (voir « Vidéo Pylône brisé ») permettra d'accompagner sa modélisation.

Autre approche du même problème : Le problème du pylône brisé tire son origine d'un traité de mathématique chinois de IIe siècle après J.C.

« Soit un bambou haut de 10 pieds. Son extrémité se brise et

touche le sol à 3 pieds du bambou.

Quelle est la hauteur du tronçon subsistant ? ».