Situation « Aire de baignade ».

Mots clés : aire, longueur, proportionnalité, modélisation, équation, fonction

Énoncé :

> **Aire de baignade**
>
> Les moniteurs d'une colonie de vacances souhaitent amener 120 enfants se baigner tous ensemble dans un lac. Pour délimiter une aire de baignade, ils disposent d'une ligne d'eau de longueur 25m.
>
> > Article D13322-10 Transféré du Décret n°2008-990 du 18 septembre 2008-art.1 Modifié par décret n° 2006-676 du 8 juin 2006-art.2() JORF 10juin 2006 (extrait).
> > La fréquentation maximale instantanée en baigneurs présents dans l'établissement ne doit pas dépasser trois personnes pour 2 mètres carrés de plan d'eau en plein air et une personne par mètre carré de plan d'eau couvert.
>
> Pourront-ils respecter la législation ?

Niveau : Troisième - Seconde

Objectifs :

- Résoudre un problème (plusieurs modèles possibles menant à différentes réponses).
- Selon le type de zone de baignade choisi, travailler des concepts d'extremum de fonction (optimisation), d'équation, d'inéquation ...

Intentions : Inciter les élèves à produire une démarche de modélisation pour résoudre un problème.

Scénario possible (choisi par un collectif) :

Les élèves sont répartis physiquement dans des groupes. Une phase de lecture individuelle et d'appropriation de l'énoncé, est laissée aux élèves. L'enseignant peut ensuite prévoir un temps de régulation pendant lequel il s'assurera de la bonne compréhension du vocabulaire et pourra, si besoin, faire reformuler par des élèves. Un temps de travail individuel (environ 10 min) permet ensuite à chacun d'entrer dans la résolution (feuille A4 en support de trace écrite).
Il est ensuite intéressant de débattre avec la classe de choix et d'hypothèses de modélisation[1] en faisant un point au tableau.
Cette phase courte est suivie d'un travail des élèves en groupe (35 min) où il s'agit, au sein du groupe, de croiser des premières investigations individuelles et de se mettre d'accord sur une synthèse écrite (une unique feuille A4 à rendre par groupe)

Il y a des réponses variées selon la(les) zone(s)) choisie(s) : si nous considérons une zone de baignade rectangulaire, les 80 m^2 nécessaires ne sont pas atteints donc la loi ne peut pas être respectée tandis qu'une zone en demi-disque dont 25 m correspondrait à la longueur du demi-cercle permet le respect de la loi.

[1] Un article d'Yvain-Prébiski & Masselin de [REPERES IREM dans le n°131]() de juin 2023 permet d'approfondir la modélisation sur cette situation.

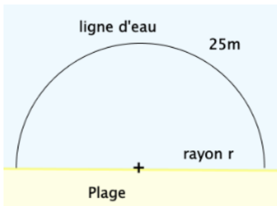
La phase de bilan peut être initiée à la séance suivante car elle nécessite du temps. Elle prendra appui sur des synthèses de certains groupes selon la visée d'enseignement. Une organisation possible est décrite en page 2 et vise en particulier la notion d'équation en seconde.

On pourra, durant ces phases, utiliser des relances (voir extrait grille d'intervention de l'enseignant).

Déclencheur d'intervention	**Interventions de l'enseignant**	**Effets attendus, buts**
L'élève questionne : « C'est quoi une ligne d'eau ? »	P : « C'est une sorte de corde qui peut flotter et limite l'endroit où on peut se baigner. »	Comprendre qu'on ne parle pas de la ligne d'eau-couloir de piscine mais d'une chaîne de flotteur. Expliquer le rôle de la ligne d'eau
Le groupe représente une zone fermée (un rectangle, un carré)	P : « Comment font les enfants pour entrer dans la zone ? »	Idée de laisser la zone ouverte sur un côté.

Extrait de la grille d'intervention de l'enseignant, « P » désigne l'enseignant

Un exemple de bilan et des pistes d'institutionnalisation :

<table>
<tr>
<td>Pour dire si la loi est respectée, il est nécessaire de :
- connaître l'aire nécessaire pour tous les enfants ;
- élaborer des zones de baignade respectant la contrainte de la longueur de la ligne d'eau.
Il faut 80 m² pour les 120 élèves. procédure(s) explicitée(s)</td>
<td rowspan="2"><u>Le cas d'un demi-disque</u>


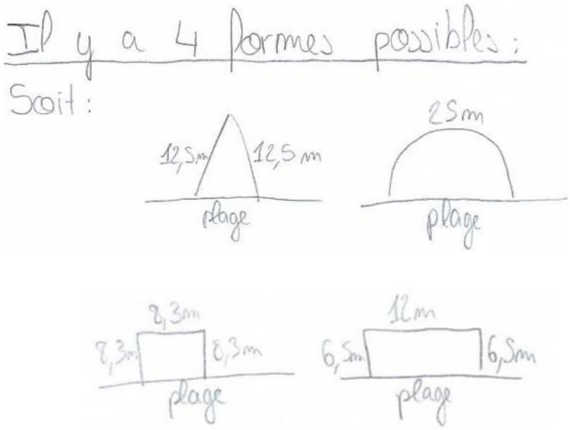
Soit r le rayon du demi-disque (berge rectiligne)
Trouver la valeur de r nécessite de résoudre l'équation $\pi \times r = 25$
$r = 25/\pi$ soit un rayon $r \approx 8\ m$.

Le calcul de l'aire A d'un demi-disque est :
$A = (\pi \times r^2)/2$ et $A = (625/\pi)/2$
d'où $A \approx 99\ m^2$ et $A > 80\ m^2$
Donc dans ce cas, la loi pourra donc être respectée.</td>
</tr>
<tr>
<td>Pour résoudre ce problème, on a fait des premières hypothèses de modélisation :
- tous les enfants se baignent simultanément,
- la berge est supposée rectiligne, …

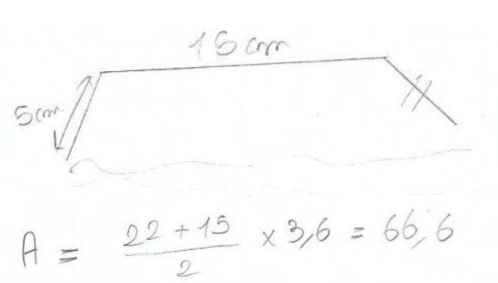
Avec une ligne d'eau de 25 m, on peut délimiter des zones de différente forme (rectangulaires, en demi-disque, triangulaires, …)
lister ceux considérés par les groupes</td>
</tr>
</table>

Ce bilan pourra permettre à l'enseignant de traiter la résolution d'équations du premier degré en seconde.

Productions d'élèves :
Deux premiers travaux individuels :



Production de l'élève 1



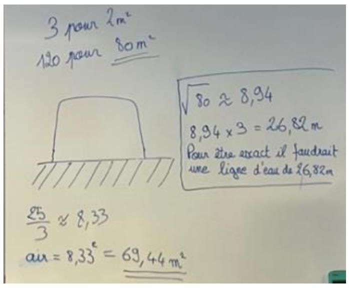
Production de l'élève 2

Le premier élève entre dans la situation en envisageant une variété de type de zones (triangulaire, demi-disque, carrée et rectangulaire). Le second élève imagine une forme trapézoïdale. D'autres élèves entrent dans la situation en se focalisant sur la loi.

Une zone de baignade carrée :

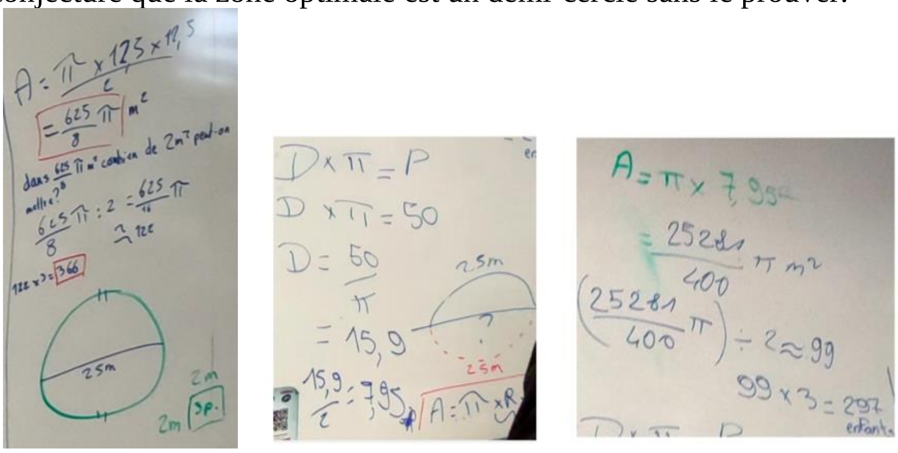
Le groupe a choisi une zone de baignade carrée de côté 25/3 en estimant son aire à $69{,}44\ m^2$.

Une élève du groupe a trouvé la contrainte d'atteindre $80\ m^2$ pour que la colonie se baigne toute ensemble. Ils ont estimé la longueur de ligne d'eau nécessaire pour une zone de baignade carrée de $80\ m^2$ et s'arrêtent.



Une zone de baignade circulaire :

Un binôme interprète la ligne d'eau comme étant le diamètre d'un disque qui représentera l'aire de baignade (figure 1). Le premier élève calcule l'aire d'un disque de rayon 12,5 m et le second utilise sa calculatrice et partage le résultat de 366 personnes.
Un autre élève du groupe continue sa recherche du diamètre, puis du rayon et obtient un rayon de $7{,}95\ m$. L'aire trouvée est arrondie à 198 m^2. Il se demande ensuite *"Combien de 2 m² dans cette aire ?"* Il détermine ensuite le nombre d'enfants et trouve 297.
Le groupe conjecture que la zone optimale est un demi-cercle sans le prouver.



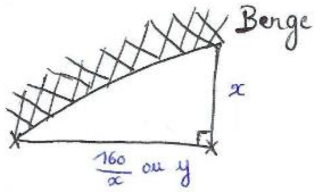
Travaux avec une zone circulaire

Remarque : Ici certains élèves considèrent ce genre de zone : c'est l'occasion de discuter des cas particuliers et du fait qu'il y a peu de chance de trouver un lac qui aurait la forme requise. Il est également possible de considérer une zone semi-circulaire de baignade dans une anse qui a cette forme. Dans ce cas, la ligne d'eau de 25 m correspond au diamètre du demi-cercle et il n'y a plus d'équation en jeu.

Une zone de baignade triangulaire :

Le groupe choisit de considérer une zone triangulaire particulière (un triangle rectangle). Il calcule l'aire minimale nécessaire et égalise l'aire du triangle à 80 m^2 pour exprimer une de leurs deux variables choisies en fonction de l'autre (y en fonction de x). Une fois ce lien établi, le groupe exprime le périmètre de la zone triangulaire et cherche à le rendre égal à 25 m. Ne sachant pas résoudre algébriquement l'équation $x + \frac{160}{x} = 80$, le groupe procède par tâtonnement en remplaçant x par différentes valeurs.

Il y a 120 enfants $\rightarrow$ 3 par 2 m^2
Il disposent de 25 m de ligne d'eau.



$\frac{x \times y}{2} = 80$

$x \times y = 160$ donc $y \frac{160}{x}$

$\frac{\cancel{x} \times y}{\cancel{x}} = \frac{160}{x}$

$x \neq 0$

$P = x + \frac{160}{x}$

$P = 25$ m

$x \approx \cancel{23}\ 12$ pour $P \approx 25,\cancel{2}31$ m.

Avec cette figure, ils ne respectent pas la législation.

Prolongement en seconde :

Il est possible de consacrer environ 1 h 30 min sur deux séances pour le cas de zones de baignades rectangulaires. Nous invitons le lecteur à prendre connaissance de la seconde fiche situation « aire de baignade » en bref correspondante où des choix de modélisation sont déjà embarqués dans l'énoncé.

Pour aller plus loin :

En première, considérer une zone de baignade rectangulaire à l'aide d'un modèle fonctionnel sera l'occasion de travailler différentes formes algébriques d'une expression (en amont de la notion de dérivée).

C'est l'occasion de questionner l'ensemble de définition (et ses valeurs extrêmes) de la fonction introduite, comparer des expressions et trouver la mieux adaptée pour démontrer une conjecture (le maximum est 78,125 m^2 dans le cas d'une zone rectangulaire). On pourra institutionnaliser des éléments concernant les variations et graphes de fonctions polynômiales du second degré.

Ici un premier choix de modèle fonctionnel où $Df = [0\ ;\ 12{,}5]$
$f(x) = x(25 - 2x)$
$f(x) = -2(x - 6{,}25)^2 + 78{,}125$
$f(x) = -2x^2 + 25x$

À d'autres niveaux :

Cette situation peut être envisagée en cycle 3 avec un objectif visé centré sur les grandeurs en jeu (aire, longueur), leur mesure et leur distinction (lien)