Cahier de Lesson Study n^{o} 4

Année 2017-2018

La caisse :
une situation, plusieurs scenarii

Co-écrit par :
Les enseignants stagiaires participant à ces Lesson Study en 2017-2018

L'équipe de formation-recherche :
Arnaud Anquetil (Groupe "Activités", IREM de Rouen)
Hélène Declercq (Groupe "Activités", IREM de Rouen)
Charlotte Derouet (ESPE Strasbourg, LISEC équipe AP2E)
Sylvain Duthil (Groupe "Activités", IREM de Rouen)
Marion Guérin (Groupe "Activités", IREM de Rouen)
Frédéric Hartmann (Groupe "Activités", IREM de Rouen)
Jordan Martin (Groupe "Activités", IREM de Rouen)
Blandine Masselin (Groupe "Activités", IREM de Rouen, LDAR)
Amandine Oney (Groupe "Activités", IREM de Rouen)

Avec le soutien de :
Nicolas Gendreau (IA-IPR de l'Academie de Rouen-Caen)

Table des matières

1 Introduction

La situation « La caisse »

L'équipe de formation-recherche a proposé la situation « La Caisse » suivante :

Énoncé :

Je possède 4 cornières de 1m de long chacune avec lesquelles je veux fabriquer l'armature métallique d'une caisse.
Quelles seront les dimensions de la caisse ?

Cornières :

Caisse :

Cette situation est issue d'une publication de l'IREM de Poitiers [1]. Elle a été proposée à des professeurs des écoles et de collège dans le cadre d'une formation-liaison cycle 3 de type Lesson Study, dans deux circonscriptions différentes : Lillebonne et Grand-Couronne.

Qu'entendons-nous par « Lesson Study » ?
Dans un établissement d'accueil, des enseignants se réunissent pour planifier une séance. Le collectif écrit un scénario pour une durée de 1h30, prévoit les difficultés des élèves et les relances pour y remédier (analyse *a priori*). Puis, un enseignant du collectif volontaire est choisi pour animer cette séance un mois après, dans une classe de l'établissement d'accueil, en suivant le scénario créé collectivement. Les autres enseignants observent son déroulement. Pour ces derniers c'est une opportunité rare de scruter les interactions entre élèves mais aussi entre élèves et professeur, chose qu'ils n'ont pas l'occasion de faire en animant leurs propres séances. S'en suit un debriefing collectif (analyse *a posteriori*). Dans un troisième temps, à l'IREM de Rouen, a lieu un retour sur les expérimentations que les enseignants du collectif auront pu mener dans leurs propres classes et un éclairage didactique est apporté sur les connaissances mises en jeu.

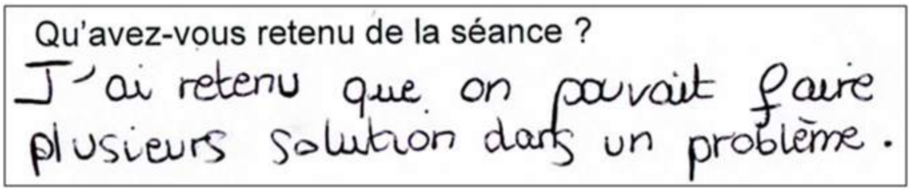
1. Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : Les VOLUMES

Les deux Lesson Study autour de cette situation, menées en parallèle, sont décrites dans ce document.

Éléments de contexte

Qu’elle soit présentée au primaire ou dans le secondaire, les objectifs visés ne seront pas les mêmes selon l’historique et la progression de la classe. Par exemple, si le pavé droit a déjà été rencontré, le travail des élèves sera davantage orienté vers la recherche des dimensions de la caisse ; si ce n’est pas le cas, davantage vers la représentation du pavé. D’autre part, l’étude de la division décimale, la connaissance des fractions ou la notion de quotient approché auront un impact dans le cas où un élève cherchera à partager une cornière de 100 cm en trois parts égales.

Par ailleurs, une particularité de ce problème, qui en fait un de ses intérêts, est l’existence de plusieurs solutions et de plusieurs procédures possibles pour les atteindre. Pour beaucoup d’élèves, habitués à ce que chaque problème n’ait qu’une solution, une telle nouveauté peut être déstabilisante, en témoigne ce retour d’élève *a posteriori* :


Qu’avez-vous retenu de la séance ?
J’ai retenu que on pouvait faire plusieurs solution dans un problème.

Enfin, la liaison entre enseignants du primaire et du secondaire sur cette situation a permis de discuter du statut de l’erreur. En effet, différentes pratiques sur l’utilisation du brouillon, du cahier d’exercices, du cahier du jour, du crayon papier, de la gomme, etc, ont été observées entre collègues du premier et du second degré, mais aussi entre collègues de même degré. Ces différences montrent que le statut de l’erreur change d’un enseignant à l’autre. Des essais successifs ont-ils le statut de réponses fausses ou font-ils partie intégrante de la résolution d’un problème ?

Ancrage dans le quotidien

L’objet caisse fait partie du quotidien des élèves. Imaginer une caisse est à leur portée. Cependant, les objets armatures ou cornières sont moins connus des élèves.

D’autre part, la tâche de construction d’une caisse ne relève pas nécessairement de leur quotidien d’enfant. De plus, le plus souvent dans la vie quotidienne, on fixe les dimensions de la caisse que l’on souhaite construire puis on achète les cornières en conséquence, alors que dans le cas présenté, on part des cornières pour trouver les dimensions possibles d’une caisse. Nous pouvons ainsi parler davantage d’un problème « concret » plus que « du quotidien ».
Par ailleurs, les objets du quotidien (boîte de mouchoirs, règle de 1 m de la classe) peuvent être une aide à la résolution du problème et offrent des moyens de validation ou d’invalidation des démarches des élèves.

B.O. et Compétences

Dans les programmes du cycle 3, concernant la géométrie dans l’espace, le B.O. ne mentionne que très succinctement la représentation en perspective cavalière, relativement aux anciens programmes.

3.3 Parallélépipède rectangle : patrons, représentation en perspective	- Fabriquer un parallélépipède rectangle de dimensions données, à partir de la donnée du dessin de l'un de ses patrons. - Reconnaître un parallélépipède rectangle de dimensions données à partir - du dessin d'un de ses patrons, - d'un dessin le représentant en perspective cavalière. - Reconnaître dans une représentation en perspective cavalière du parallélépipède rectangle les arêtes de même longueur, les angles droits, les arêtes, les faces parallèles ou perpendiculaires. *- Dessiner ou compléter un patron d'un parallélépipède rectangle.*	À l'école élémentaire les élèves ont déjà travaillé sur des solides droits de l'espace (description, construction, patron). Cette étude est poursuivie en 6e en mettant l'accent sur un aspect nouveau : la représentation en perspective cavalière, *dont certaines caractéristiques sont précisées aux élèves.* L'usage d'outils informatiques permet une visualisation de différentes représentations d'un même objet de l'espace. Même si les compétences attendues ne concernent que le parallélépipède rectangle, les travaux portent sur différents objets de l'espace et s'appuient sur l'étude de solides amenant à passer de l'objet à ses représentations et inversement.

Extrait B.0. 08-2008 Programme du collège, page 17

Le document Eduscol « Espace et géométrie au cycle 3 » [2] précise les attendus actuels concernant la géométrie.

À l'articulation de l'école primaire et du collège, le cycle 3 constitue une étape importante dans l'approche des concepts géométriques. Prolongeant le travail amorcé au cycle 2, les activités permettent aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets (le carré, la droite, le cube, etc.) et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par le recours à des instruments, par l'explicitation de propriétés pour aller ensuite vers une géométrie dont la validation ne s'appuie que sur le raisonnement et l'argumentation.

Extrait B.0. 11-2015 Programme pour le cycle 3, page 210

2. http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Geometrie/38/5/RA16_C3_MATH_Espace-geometrie_897385.pdf

2 Analyse *a priori*

Dans cette partie, le lecteur trouvera tout d'abord une analyse *a priori*. Elle porte sur la tâche proposée initialement par les formateurs. Cette analyse a été effectuée par des groupes d'enseignants stagiaires. Elle est suivie d'une réflexion sur l'insertion de cette tâche dans une progression.

Connaissances mises en jeu

Lillebonne :

- Connaissance des solides, description
- Représentation dans l'espace (avec arêtes cachées)
- Parallélépipède rectangle, faces rectangulaires
- Longueur, largeur, hauteur
- Arêtes de même longueur
- Grandeurs en général
- Opérations sur les décimaux (en mètre)
- Conversions (m en cm)
- Décomposition en sommes
- Utilisation de la calculatrice
- Recherche des dimensions optimales pour un prolongement.

Grand-Couronne :

- Mesure de longueurs
- Conversion
- Division
- Nombre décimal
- Solide (différence cube et pavé droit, perspective, vocabulaire)
- Périmètre
- Quadrilatère
- Modéliser, représenter un solide (utilisation de la techno pour créer un modèle)

Dimension Vie quotidienne

Lillebonne :

- Questions possibles en lien avec la réalité : Présence d'un couvercle ? Épaisseur des cornières ? Présence de cornière dessous ? Peut-il y avoir un reste de cornières ? Faut-il utiliser les 4 m obligatoirement ?
- Utilité des cornières : protéger la caisse, aspect esthétique
- Problème de menuisier mais posé « à l'envers » : j'ai une caisse, combien me faut-il de cornières ?
- Cherche-t-on une caisse ou plusieurs ?
- Place du cube ? La photo induit une caisse avec contraintes, elle n'induit pas certaines dimensions.

Grand-Couronne :

- Caisse : objet de la vie quotidienne qui a déjà du sens pour les élèves.
- Problème qui n'a pas de lien avec la réalité de la vie d'un élève.

Place dans la progression

Lillebonne :

- Pré-requis : 1 m = 100 cm.
- En 6^{e} : Réintroduire les solides. Vocabulaire, représentation en perspective, propriétés du pavé. Périmètre, aire, volume en prolongement
- Avant les solides ou pas ? En 6e, on peut placer cette activité n'importe quand. Au cycle 3, avoir vu les solides et les conversions m/cm.
- Problème ayant plusieurs solutions : plusieurs dimensions de caisse possibles, avec ou sans reste de cornières.

Grand-Couronne :

- En CM2 : plutôt en fin d'année, pour clore une séquence sur les solides, problème d'approfondissement, de recherche, de réinvestissement du cours.
- En 6^{e} :
  - début des solides, retour sur acquisition des connaissances de primaire,
  - introduction aux calculs de volume.
- En SEGPA : partir du solide pour arriver aux quadrilatères.
- Ce peut être aussi une activité d'introduction aux solides.

Si les enseignants de Lillebonne ont envisagé la classe de 6e, ils ont aussi évoqué la place dans une progression en CM1 et CM2 avec comme objectif la résolution de problème.
Les remarques suivantes mettent en avant des différences de curriculum entre CM1 et CM2 :

- en CM1 : il est souhaitable d'insérer cette situation après avoir travaillé les conversions (1 m = 100 cm). La situation semble trouver toute une place en CM1, où est abordé le parallélépipède rectangle.
- en CM2 : la résolution peut s'appuyer sur les nombres décimaux.

Dimension TICE

Lillebonne :

- Tableur : différentes possibilités de longueur, largeur, hauteur dont la somme est 100, effectué par l'enseignant
- Tableur utilisé par l'enseignant pour valider les propositions des élèves
- Modélisation du solide avec un logiciel de géométrie dynamique par l'enseignant, faire varier les dimensions pour visualiser les différentes possibilités (3 curseurs)
- Imprimante 3D

Grand-Couronne :

- Projection de l'énoncé, d'une image
- Projection d'un solide créé avec un LGD en remédiation, pour aider les élèves à compter les arêtes (possibilité de faire tourner le solide)
- Calculatrice

Procédures élèves possibles

Nous entendons ici par procédures possibles, toutes les procédures, même celles non abouties, voire erronées.

Lillebonne :

- Besoin de manipuler. Prévoir des baguettes en bois (ou en carton) à disposition des élèves, un mètre du menuisier (repliable).
- Besoin de se représenter dans l'espace : pliage avec du papier, nécessite l'utilisation d'une échelle de réduction.
- Dessin : représentation des cornières par des segments.
- Dessin de patron.
- Dessin d'un cube.
- Démarche numérique :
  - $1\,\text{m} = 100\,\text{cm}$
  - $1 = 0,\ldots + 0,\ldots + 0,\ldots$
  - $1 \div 3$
- Démarche par tâtonnement : trouver une longueur, une largeur, une hauteur pour la caisse dont la somme des arêtes donne 4 m.
- Idée du cube : rechercher le résultat de $400 \div 12$ par tâtonnement ou avec une calculatrice.

Grand-Couronne :

- En 6e, laisser ce problème ouvert, laisser les élèves prendre des initiatives. En CM, nécessité de guider davantage, de proposer un énoncé avec des questions intermédiaires, un problème à étapes.
- Manipulation de cornières. Découper des bandes de papier pour créer un pavé. Prévoir des aides à la manipulation à donner à certains élèves ? À tous les élèves ? Proposer des aides à tous les élèves ne risque-t-il d'enfermer les élèves dans une démarche et de les empêcher de mener leur propre réflexion ?
- Tester des mesures, puis ajuster.

— Cas des arêtes toutes identiques : diviser 4 par 12 ou 400 par 12. Avec la calculatrice ou à la main ? Division euclidienne ou décimale ? Nombre en écriture décimale ou fractionnaire ?

— 4×1 m $= 4$ m. Donc, les dimensions de la caisse font 4 m.

— Choisir deux mesures (grandes arêtes et petites arêtes) en tâtonnant.

Difficultés et erreurs possibles

Lillebonne :

— Vocabulaire utilisé « cornière » et « armature ».

— Vocabulaire « dimensions de la caisse » : dimensions possibles ? Dimensions maximales ?

— Certains élèves risquent de ne rien voir. Quels outils leurs proposer ? Maquettes, cornières à montrer aux élèves dans la phase de présentation de l'énoncé ou en différenciation.

— Doit-on utiliser toutes les cornières ?

— La cornière doit-elle être en un seul tenant pour chaque arête ?

— Éloignement du problème initial en recourant à des patrons.

— Compter 6 arêtes au lieu de 12.

— Division de 1 par 3. Les difficultés rencontrées vont dépendre du travail sur le nombre $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$ déjà mené ou pas. Quel statut pour $\frac{1}{3}$? Idem pour $\frac{4}{12}$.

— Faire le lien entre le partage des cornières et la division.

— Représentation du solide

Grand-Couronne :

— Vocabulaire « cornière » et « armature ».

— Photo : Un pavé est représenté et non pas un cube. Les élèves vont-ils s'interdire de faire des cubes ?

— Convertir en cm, faire la démarche de convertir.

— Diviser 1 par 12. Obtenir une écriture décimale d'un nombre qui ne peut pas être mesuré avec une règle.

— Présence de plusieurs réponses et pas une seule bonne réponse. Déstabilisant.

— Difficulté du 4×1 m. Le 1×4 m serait-il moins source d'erreur ? Avec une seule cornière de 4 m (ou 400 cm), l'idée de diviser en 12 morceaux serait-elle plus naturelle ? Le 1×4 m risque-t-il d'enfermer les élèves dans la seule stratégie de diviser 4 m par 12 ?

— Utiliser les 4 cornières de 1 m pour former une seule face.

— Voir les faces cachées, les arêtes cachées

— Vocabulaire « dimensions ». Pour un élève de cycle 3, une dimension est quelque chose que l'on mesure. L'expression « les dimensions de la caisse » risque de ne pas avoir de sens pour les élèves. Conceptualiser ce que l'on mesure dans le solide est une difficulté, la connaissance des termes longueur, largeur, hauteur peut faire défaut.

3 Déroulement des deux Lesson Study

Lesson Study, Lillebonne

Énoncé modifié

Le collectif a choisi cet énoncé, intitulant la situation « Bricolage » :

BRICOLAGE

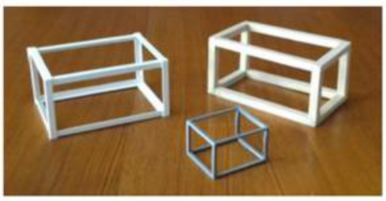
Je possède 4 cornières de 1m de long chacune.
Je veux les utiliser pour fabriquer l'armature métallique d'une caisse. Quelles sont les dimensions possibles de la caisse ?

Des cornières

Des caisses

Après avoir débattu sur la question initialement proposée, relativement à la non unicité de la réponse, le collectif a peu remanié cette dernière. Un choix s'est porté sur plusieurs photos. D'autres images ont été préférées car la photographie de caisse initiale semblait induire deux dimensions identiques sur les trois.

Les images de relance pour aider certains élèves ont été écartées au profit de solides en fil de fer disponibles pour l'enseignant, au cas par cas (pavés droits, cubes).



Objectifs de la séance

— Mettre en œuvre une démarche

— Mettre en place du vocabulaire : faces, arête, etc

— Propriétés des arêtes égales (codages)

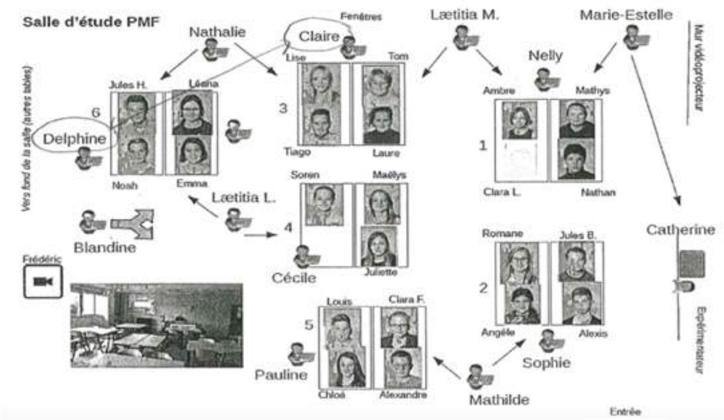
— Représentation en perspective

Pré-requis

1 m = 100 cm

Mode opératoire

Faire six groupes hétérogènes de 4 élèves, sans rôle désigné.



Déroulement envisagé

Voici le déroulement prévu en quatre phases.

Rappel des différentes phases du déroulement de la Lesson
Phase 1: (15 min) Compréhension de la situation • Distribution de l'énoncé, lecture individuelle (3 min) • Point sur le vocabulaire • 10 min de recherche individuelle • Feuilles à disposition (blanches, quadrillées)
Phase 2: (45 min, jusqu'à la pause) **Confrontation et travail de recherche en groupe**
Pause: (10 min) Scan des productions des groupes
Phase 3: Bilan (30 min) • Bilans à montrer (faux+corrects) • Les élèves valident • GeoGebra en appui
Phase 4: Institutionnalisation • Distribution de la fiche à commenter et compléter

La phase 1 (15')

Un travail de recherche individuel court, permet de faire un point sur les mots qui pourraient bloquer certains élèves (armature, dimensions). Des feuilles de deux types sont à disposition des élèves pour leurs premiers essais de résolution : blanches et quadrillées. Le collectif pense que le quadrillage peut aider certains élèves à entrer dans le problème via une représentation.

La phase 2 (45')
Mise au travail des élèves en petits groupes de trois ou quatre. cette phase doit permettre de partager des démarches et a pour objectif final une production d'une synthèse des travaux du groupe.

Pause (10')

La phase 3 (30')
C'est la phase d'exposition de certaines productions de groupe sélectionnées par le collectif d'enseignants. Ces fiches de synthèse de groupes sont scannées puis projetées par l'enseignant grâce à un vidéo-projecteur. Ce dernier a choisi de montrer des démarches en particulier invalides en premier. La classe doit ainsi se positionner par rapport aux documents produits. Cette phase se termine par l'emploi d'un fichier GeoGebra préparé par le collectif d'enseignants.

La phase 4 (durée non déterminée)
C'est la phase d'institutionnalisation, elle prend appui sur une fiche, prévue en amont par le collectif.

Analyse *a posteriori* du déroulement effectif

La phase 1

La lecture individuelle de la consigne a duré deux minutes. Des questions ont émergé sur les mots « armature » et « cornière », sans aucune question sur les dimensions. Ils n'ont pas demandé à manipuler des cornières. L'enseignante en a juste montré un morceau de loin. Peut-être que la présence de plusieurs photos a induit qu'il y avait plusieurs solutions mais pas pour autant un triplet de nombres attendu. Certains élèves ont repassé les cornières avec un feutre sur une photo de l'énoncé. La photo de la caisse aux lattes de bois a perturbé un groupe. L'un des élèves a dit « Je ne comprends pas, la caisse elle peut mesurer combien ? » en montrant les bouts de planches assemblés, sans intégrer la hauteur de la caisse comme dimension.

Côté matériel, l'enseignante a fourni, soit une feuille blanche soit une feuille quadrillée à chaque élève, sans laisser la possibilité aux élèves d'avoir les deux types de support simultanément. Ceci a pu bloquer certains élèves se lançant dans des représentations et rencontrant des difficultés. Certains ont tenté de dessiner des patrons. Comme le montre la photographie ci-dessous, même si certains n'ont rien écrit pendant cette phase, l'absence de trace écrite ne signifie pas une absence de réflexion mathématique de leur part (observation de l'image, manipulation, décompte mental des arêtes, etc).

Découpage de cornières "feutres" par les crayons.

La phase 2

Les élèves n'ont pas posé de question sur les chutes possibles relativement aux 4 mètres. Trois groupes ont demandé l'accès à une calculatrice, ce que l'enseignante a autorisé. Certains groupes ont mieux coopéré que d'autres : il ne s'agit pas seulement de trouver une réponse au problème mais l'enjeu est aussi, pour l'élève, d'expliciter sa procédure pour atteindre une(des) solution(s). Pour l'enseignant, la variété de démarches constitue une difficulté dans la prise en charge de celles-ci, car elle lui demande une prise d'indices constante et une adaptation des interventions dans chaque groupe.

Nous relaterons, par choix, uniquement le travail de quelques groupes d'élèves car ils nous semblent apporter des éléments intéressants autour de la modélisation ou de l'arithmétique. Des extraits vidéo sur le site de l'IREM [3] de Rouen complètent cette analyse.

Groupe 1 (Ambre)

Ambre tente de résoudre l'équation $4L + 4l + 4h = 400$. Plus précisément, elle cherche à mettre en évidence une solution à cette équation. Elle teste, le triplet (46,6 ; 40 ; 15) qu'elle a obtenu d'une façon ou d'une autre. Elle obtient donc $46{,}6 \times 4 + 40 \times 4 + 15 \times 4 = 406{,}4$. C'est trop. Elle retire $1{,}5 \times 4$ (dans un premier temps elle oublie le facteur 4) pour obtenir 400,4. Elle comprend qu'il faut encore enlever 0,4. Après quelques hésitations, elle fini par obtenir 400 en faisant :

$$46{,}6 \times 4 + 40 \times 4 + 15 \times 4 - 1{,}5 \times 4 - 0{,}4$$

À ce moment les autres élèves, complètement dépassés par ce qu'elle fait, tentent de la freiner : « Ouh là, tu es partie dans quoi, là ! ». Elle a adopté une démarche algébrique. Sans pour autant l'écrire rigoureusement de la même façon, elle aurait pu s'en sortir en répartissant son « excédent » sur une des dimensions (ici la 3$^{\text{ème}}$) :

$$\begin{aligned}
400 &= 46{,}6 \times 4 + 40 \times 4 + 15 \times 4 - 1{,}5 \times 4 - 0{,}4 \\
400 &= 46{,}6 \times 4 + 40 \times 4 + 15 \times 4 - 1{,}5 \times 4 - 0{,}1 \times 4 \\
400 &= 46{,}6 \times 4 + 40 \times 4 + (15 - 1{,}5 - 0{,}1) \times 4 \\
400 &= 46{,}6 \times 4 + 40 \times 4 + 13{,}4 \times 4
\end{aligned}$$

Ceci est relaté dans l'extrait vidéo sur le site de l'IREM de Rouen.

Groupe 2 (Alexis, Jules)

L'enseignante fait une remarque à Alexis sur l'utilisation de la calculatrice. Celui-ci semble très engagé dans sa démarche et la calculatrice lui parait être un bon outil. Jules propose de « diviser par

3. http://irem.univ-rouen.fr/node/lessons/04

trois » (comprendre diviser par trois chaque cornière de façon à obtenir 12 cornières plus petites). Son but est de produire un cube. Il détient une première solution mais Alexis n'est pas d'accord : « Là, ce n'est pas un cube, c'est un rectangle ». Excepté les questions de vocabulaire (vocable rectangle pour pavé droit) et la croyance bien ancrée qu'un carré n'est pas un rectangle, ces élèves ont-ils conscience qu'il peut y avoir plusieurs solutions au problème posé ?

Alexis est sur une autre piste mais n'est pas en contradiction avec Jules. C'est peut-être leur première rencontre avec un problème à multiples solutions. Il faudra sans doute institutionnaliser cela d'une façon ou d'une autre, en indiquant par exemple « Ce problème admet plusieurs solutions qui amènent à des caisses différentes ». Une observatrice demande à Alexis de montrer son calcul. Il l'a effacé pensant « qu'il ne valait rien ». Plus tard, Alexis renonce à son idée et se résigne à suivre l'idée du cube de Jules. Ils effectuent $400 \div 3$ à la calculatrice et se trouvent confrontés à 133.33333… Alexis pense qu'il y a un problème de réglage de calculatrice : « Va dans les paramètres ». Il cherchait à faire apparaître l'unité cm sur sa calculatrice. La notation fractionnaire $\frac{400}{3}$ a ensuite soulevé un débat dans le groupe.

L'extrait-vidéo correspondant est ce dernier :

La question de la validation des résultats d'Alexis dans ce groupe est traitée en Annexe A.

Groupe 6

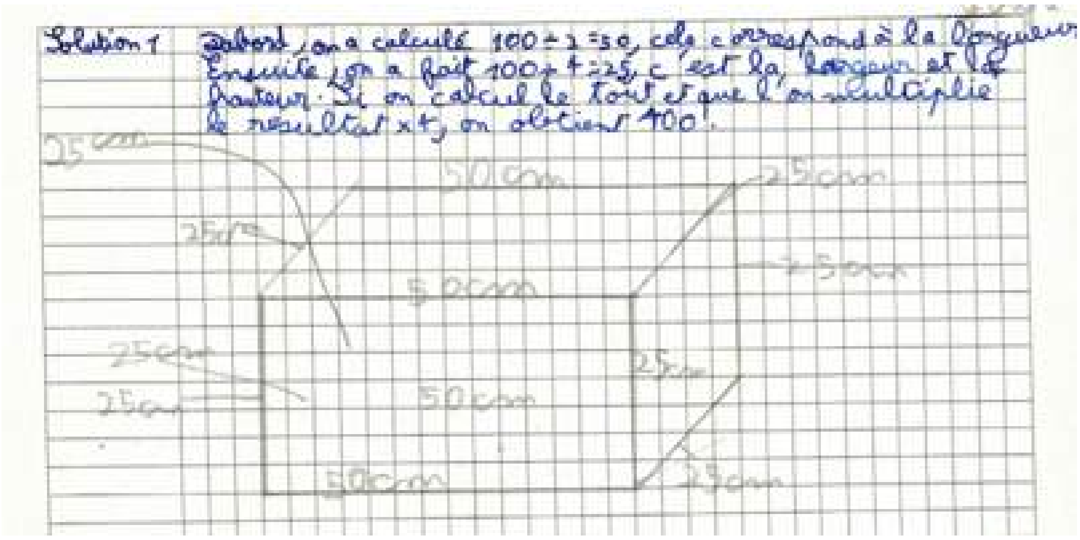
Dans un échange oral précédent, ce groupe d'élèves obtient une solution avec un pavé droit de base 50 cm par 25 cm. Ils divisent en 4 le mètre restant et trouvent une hauteur de 25 cm. Lors du passage à l'écrit, un doute apparaît sur le nombre d'arêtes du pavé. En effet, les arêtes cachées sur la photographie les dérangent. Les élèves demandent alors « un cube », souhaitant en réalité un pavé droit non cubique, mais le désignant de façon incorrecte. L'enseignante s'exécute en donnant une maquette de cube et non de pavé droit quelconque. Pour ce groupe, qui a raisonné initialement sur des représentations de pavé droit, ce changement de modèle, involontairement amené par l'enseignant, perturbe leur travail. Les élèves cherchent maintenant des solutions dans lesquelles les longueurs sont égales deux par deux et proposent des bases de 10 cm par 10 cm, 25 cm par 25 cm, 30 cm par 30 cm et 20 cm par 20 cm. En manipulant la maquette, ils tentent de faire correspondre les faces du dessous et du dessus de la caisse en photo avec celles du cube. Léa dit alors « Et encore on n'a pas ajouté ces côtés là ! » en désignant les quatre « hauteurs ». Ils choisissent la solution 20 cm par 20 cm par 20 cm, influencés par la maquette cubique. Mais ils peinent à dénombrer les arêtes et obtiennent une longueur totale de 3,20 m. Ils se rendent compte ensuite qu'ils n'ont pas utilisé la totalité des 4 m. Ils tentent de changer la taille de certaines arêtes pour utiliser les 80 cm restants et imaginent des faces rectangulaires (25×20) mais ont des difficultés à les visualiser sur le cube qu'ils manipulent. Pour ce groupe, la maquette, par sa forme cubique, n'a pas permis de lever le doute sur le nombre d'arêtes.

Ceci est illustré dans l'extrait vidéo :

Il s’agit de l’unique groupe qui a eu accès à un solide « fil de fer ». Une question subsiste : qu’auraient fait ces élèves si, dès le début, ils avaient eu accès à des pavés droits non cubiques ?

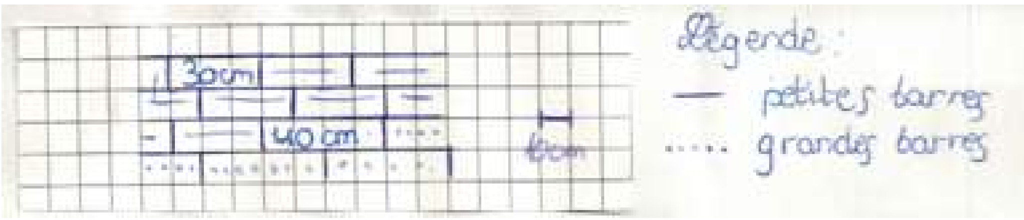
La phase 3

Production du groupe 1



Ce premier choix a permis de revenir sur la représentation en perspective et ses règles. Ont été ajoutées les arêtes manquantes en pointillé. Nous pouvons noter la place de calculs au milieu du langage naturel.

Production du groupe 3



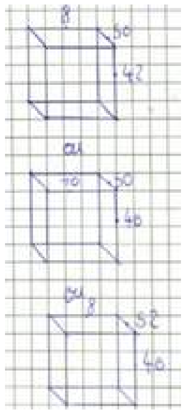
Le groupe a réalisé une modélisation, en prenant appui sur le quadrillage. L’enseignante a projeté ce travail à toute la classe, motivant ainsi ce choix : « Je ne voulais pas qu’on mette bout à bout des morceaux mais qu’on forme des arêtes d’un seul tenant, d’un point de vue solidité de la caisse. »

C’est le retour au quotidien qui a orienté le choix de l’enseignante vers l’invalidation de la solution proposée par ce groupe.

Remarquons que ce groupe d’élèves s’est appuyé sur le quadrillage et l’a utilisé de manière non anticipée par le collectif lors de la préparation de la Lesson Study.

Production du groupe 4

Un patron de la caisse, où il manque une face, est exposé à la classe. Ce fut l'occasion de questionner les élèves sur la validité d'un patron de solide.

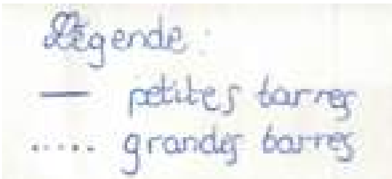


Production du groupe 2

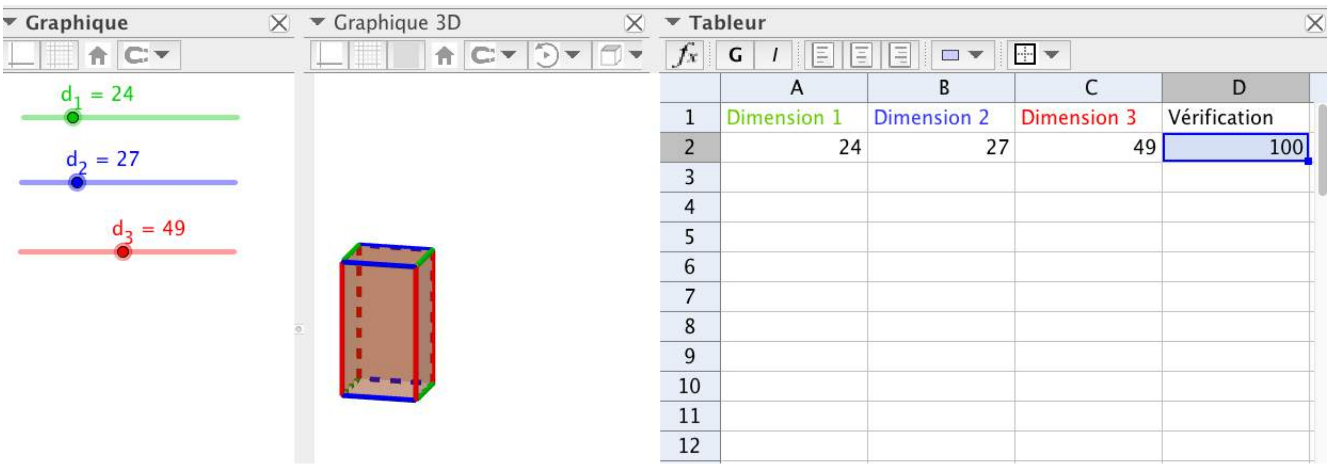
Une procédure par essais-ajustements est mise en avant avec trois solutions représentées ci-contre. Celles-ci s'appuient à chaque fois sur un cube malgré des dimensions distinctes.

Alternatives et réflexions autour de la phase 3

- Concernant la production du groupe 3, la légende est un « embryon » de codage, occasion qu'aurait pu saisir l'enseignante pour une modélisation sous forme de segment des cornières.



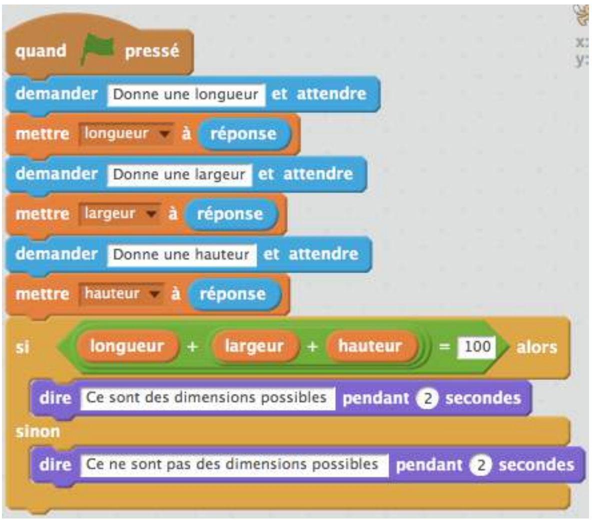
- Cela aurait pu être une opportunité pour trouver une méthode de validation du triplet de dimensions annoncées : la somme des trois longueurs distinctes fait-elle 100 cm ?
- La situation « La Caisse », au regard de la production du groupe 2, paraît un tremplin intéressant pour travailler la notion de fraction, ou pour revenir ultérieurement sur 400 ÷ 3.
- Si le collectif a décidé d'explorer plutôt la représentation d'un pavé droit, la situation peut aussi servir d'appui pour un travail tourné vers l'arithmétique et les nombres.
  La phase 3 s'est terminée par la projection par l'enseignante du fichier Geogebra dont voici une capture d'écran. L'enseignante a repris des triplets de dimensions proposés par les groupes et a mis les curseurs aux valeurs proposées.



L'enseignante a manipulé devant la classe un fichier GeoGebra avec des curseurs (un pour chaque dimension attendue). Les élèves ont proposé une formule pour valider les triplets trouvés, ce qui n'était pas prévu dans le scénario. Le travail était alors plus algébrique, mais relié au cadre géométrique grâce au logiciel GeoGebra et ses différentes fenêtres juxtaposées, mises en relation par la dynamique des curseurs incarnant les variables d_1, d_2 et d_3. Une formule a été induite par l'enseignante expérimentatrice : $4l + 4L + 4h = 400$. Une alternative de formule aurait été de travailler avec : $l + L + h = 100$ (entrée du groupe 3).

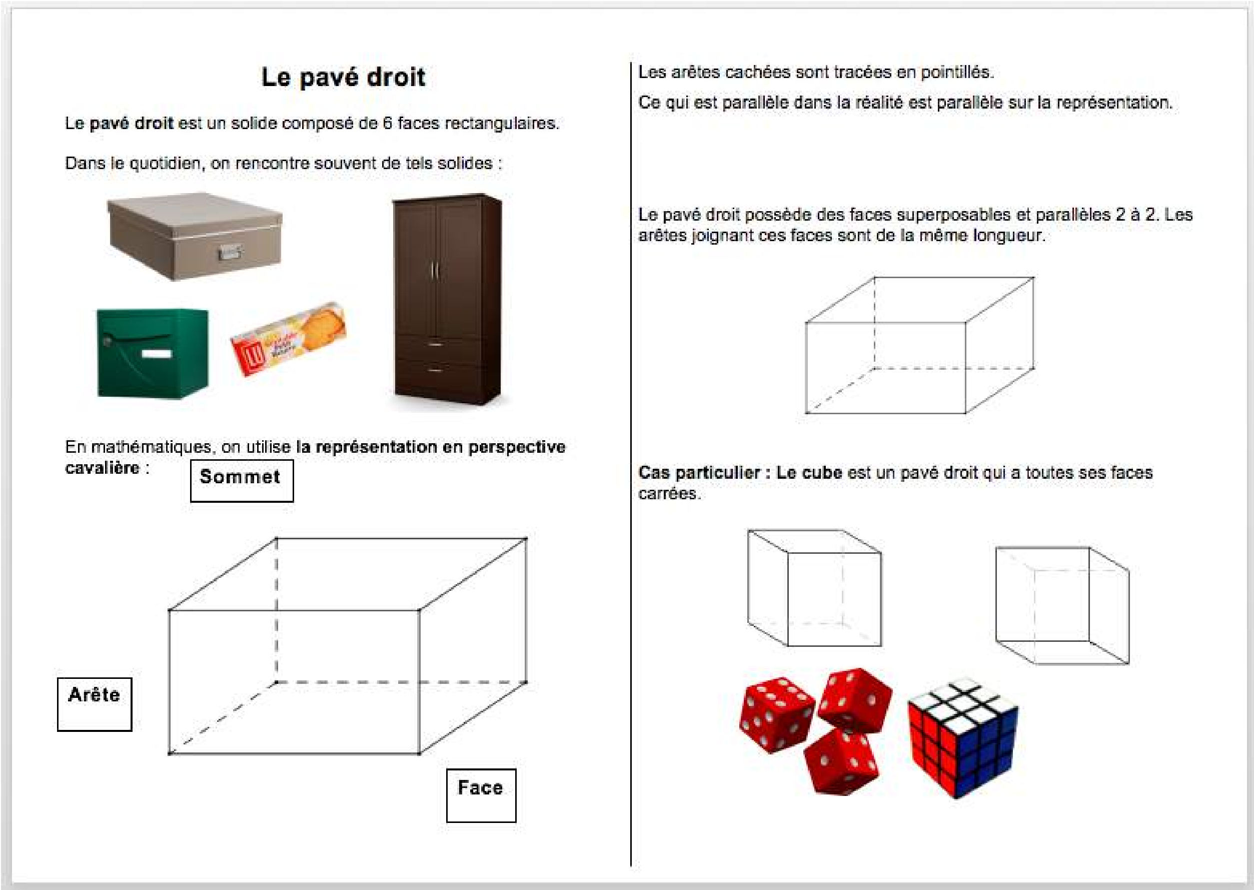
- Alternative : faire créer un script sous Scratch (lors d'une autre séance TICE) avec comme objectif d'obtenir un programme qui valide ou non des dimensions proposées.

Un script possible est :



La phase 4

Il s'agissait de projeter et de compléter avec la classe le document fourni aux élèves, et en particulier « Les arêtes cachées sont : … ». L'enseignante expérimentatrice a alors fait désigner une arête, une face et un sommet par trois élèves différents qui se sont déplacés à chaque fois au tableau où était représenté un pavé droit en perspective.



Le pavé droit

Le **pavé droit** est un solide composé de 6 faces rectangulaires.

Dans le quotidien, on rencontre souvent de tels solides :

En mathématiques, on utilise **la représentation en perspective cavalière** :

Les arêtes cachées sont tracées en pointillés.

Ce qui est parallèle dans la réalité est parallèle sur la représentation.

Le pavé droit possède des faces superposables et parallèles 2 à 2. Les arêtes joignant ces faces sont de la même longueur.

Cas particulier : Le cube est un pavé droit qui a toutes ses faces carrées.

Ceci aurait pu être l’occasion d’introduire des noms des points pour chaque sommet afin de faciliter la désignation des segments arêtes, des faces, etc.

Alternatives autour de la représentation en perspective cavalière. Pour confronter ce qui se passe en réalité et ce qui se passe en représentation en perspective (en termes de parallélisme ou perpendicularité), une enseignante propose un document (Annexe B).

Lesson Study, Grand-Couronne

Énoncé modifié

Le collectif préparant la Lesson Study dans la circonscription de Grand-Couronne a modifié l'énoncé de l'activité « La Caisse » ainsi :

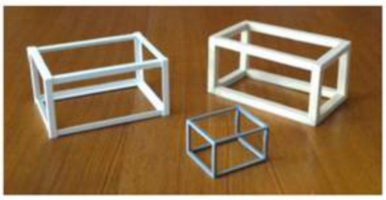
Je possède 4 cornières de 1m de long chacune avec lesquelles
je veux fabriquer l'armature métallique d'une caisse.
Quelles seront les dimensions de la caisse ?

Cornières :

Caisse :

Après un débat au sein du collectif, il est décidé de garder le vocabulaire « cornière », « armature » et « dimensions ». Par contre, la deuxième illustration des cornières, jugée inutile voire gênante pour la compréhension de l'énoncé, est enlevée. Cet énoncé est imprimé en noir et blanc sur une feuille A5.

L'image ci-dessous est gardée en relance, pour expliquer à des élèves qui en ressentent le besoin, le mot « armature ».



Objectifs de la séance

- Réinvestir la représentation du pavé et du cube, 6 faces rectangulaires, 8 sommets et 12 arêtes
- Conceptualiser les 3 dimensions de la caisse. Introduire la notion de « hauteur ». Nombre d'arêtes : 4 longueurs, 4 largeurs, 4 hauteurs.
- Comprendre que le cube est un pavé particulier.

Déroulement envisagé

Les 23 élèves de la classe travaillent en îlots. L'enseignant de la classe constitue 5 groupes de 4 et 1 groupe de 3.

Travail individuel (2’)
Distribution de l’énoncé. Puis lecture silencieuse, individuelle.

Retour collectif (5’)
Lecture à voix haute par l’enseignant. Demander aux élèves si le vocabulaire de l’énoncé est compris. Si besoin, à la demande des élèves, faire reformuler et expliciter le vocabulaire « cornière » et « armature ». Pour « dimension », parler seulement de « mesure ». Ne pas dévoiler à ce stade de l’activité l’existence de trois dimensions (longueur, largeur, hauteur). La prise de conscience par les élèves de l’existence de ces trois dimensions est un enjeu de cette séance.

Travail de groupe (30’)
Une feuille A3 blanche est distribuée à chaque groupe. Chaque groupe y produit ses démarches, toutes les démarches, celles qui marchent et celles qui ne marchent pas. Les élèves sont donc invités à ne pas effacer. La feuille A3 est à la fois une affiche pour exposer le travail du groupe et le recueil des essais du groupe.

Mise en commun (12’)
Afficher au tableau avec des aimants les feuilles A3. Les élèves des six groupes viennent présenter leur travail au tableau, groupe par groupe. Les autres élèves écoutent. Le professeur reformule les stratégies des élèves sous leur contrôle et note au tableau les idées clés. Les groupes volontaires passent en premier, sans tenir compte du contenu. S’il manque du temps, ne pas faire passer les doublons. But : faire ressortir les différentes démarches, mettre en valeur les démarches les plus significatives.

Pause (10’)

Institutionnalisation (15’)
Document à distribuer et à faire compléter. Décrire le pavé et le cube. Identifier les sommets, les arêtes, les faces et les dénombrer. Identifier les trois dimensions du pavé : longueur, largeur, hauteur. Identifier les arêtes de même longueur (code en couleur).

Calculatrice : Ne pas préciser si elle est autorisée ou non afin de ne pas influencer les démarches des élèves. Elle permet un gain de temps pour effectuer des calculs. Des problèmes de lecture de l’affichage sont à prévoir (interprétation des décimales dans le cas d’un affichage comportant un grand nombre de décimales ; interprétation d’un affichage d’une écriture fractionnaire).

Analyse *a posteriori* du déroulement effectif

La salle est disposée en îlots avant l’arrivée des stagiaires, suivant un plan défini par le professeur de la classe. La place de chaque observateur est définie par les formateurs.

Travail individuel (2’)
L’énoncé est distribué aux élèves. Le professeur expérimentateur demande de lire silencieusement le texte. Quelques élèves ouvrent leur trousse pour prendre un stylo. Le professeur rappelle alors que cette première phase est une phase de lecture et précise aux élèves que pour l’instant ils n’ont pas besoin d’écrire. Nous observons alors une frustration chez certains élèves pour qui écrire est nécessaire afin de s’approprier l’énoncé et faire exister leurs premières idées.

Alternative : laisser davantage de temps lors de cette phase de travail individuel et inviter les élèves à écrire sur leur énoncé ou sur une feuille de brouillon leurs premières idées.

Retour collectif (5’)
Pas de vrai débat lors de la lecture collective de l’énoncé. Les élèves venant de rentrer en classe sont encore timides et ne posent donc pas de question alors que l’énoncé n’est pas compris par beaucoup d’entre-eux. Une seule élève demande au professeur : « Il faut trouver combien de cm doit faire la caisse ? ». Ici, c’est le mot « dimensions » de l’énoncé qui est questionné. Comme prévu dans le scénario, l’expérimentateur acquiesce et reformule « trouver les mesures de la caisse ». Se pose alors la question de valider ainsi le propos de l’élève sans l’expliciter davantage. Une telle démarche est hasardeuse dans la mesure où nous ne savons pas ce que l’élève réellement compris.

Alternatives :

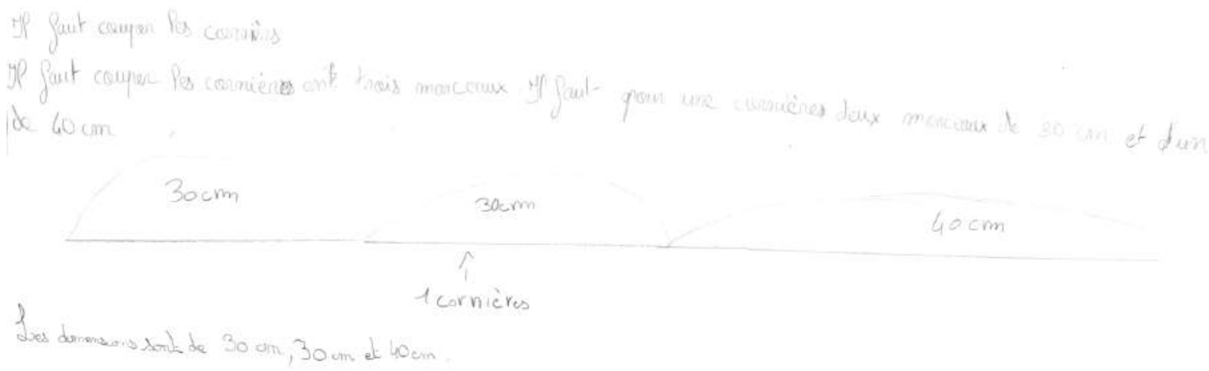
* Renvoyer la question des dimensions de la caisse à la classe et en débattre en classe entière. Les notions de longueur, largeur et hauteur seraient alors explicitées dès le début de la séance, au risque que les élèves ne s’autorisent plus à modéliser la caisse à l’aide du cube. La division par 12 risque ainsi de n’être traitée par aucun élève.
* Renvoyer la question à chacun des groupes lors de la phase de travail en groupe. La première intervention du professeur lors de cette phase serait alors de s’assurer que les élèves se sont mis d’accord sur ce que signifie le mot « dimensions » et qu’ils ne sont pas bloqués par ce mot.

Travail de groupe (30’)
Le passage au travail de groupe n’est pas immédiat pour tous. Les élèves ont du mal à échanger sur une procédure, n’ayant pas eu le temps lors de la phase de travail individuel d’initier leur propre procédure. Nous observons, dans plusieurs groupes, qu’un élève impose aux autres sa démarche, sans concertation.

Alternative : laisser plus de temps dans la phase individuelle pour permettre à chaque élève d’initier une démarche de résolution personnelle qu’il pourra partager et sur laquelle il pourra échanger avec les autres élèves de son groupe.

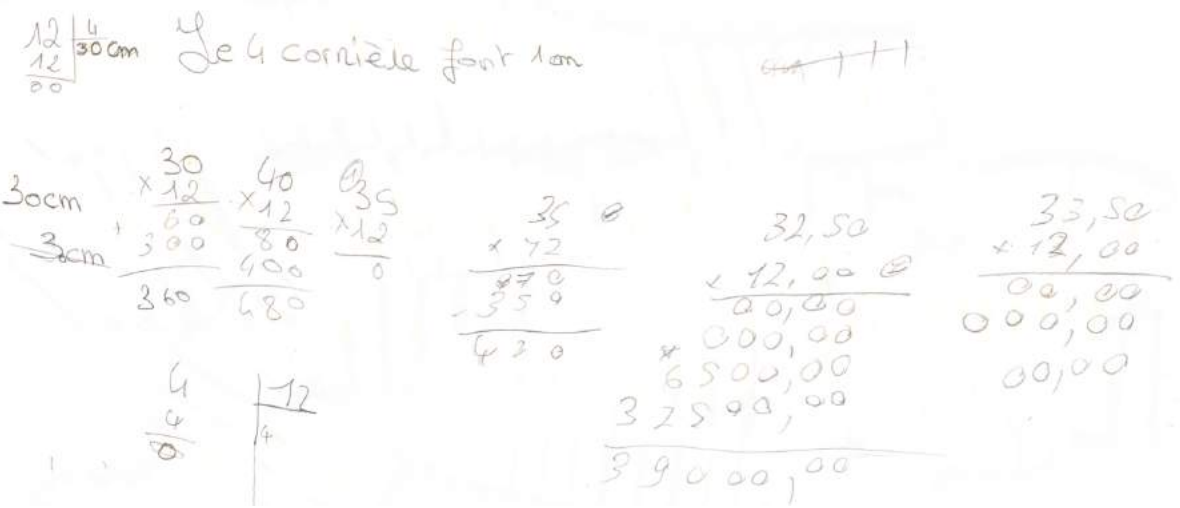
Groupe 2 :
Le groupe 2 ne comprend pas la signification de l’expression «dimensions de la caisse» pendant tout le travail collectif. Le dénombrement des 12 arêtes du solide est obtenu difficilement et fait débat dans le groupe.
Le groupe cherche à découper les cornières en 12 morceaux. Pour cela, il commencent par découper chaque cornière en deux, ce qui donne 8 morceaux et donc ne marche pas. Puis, ils proposent de découper chaque barre en 3. Cependant, pour ces élèves, découper une barre en 3 revient à découper la barre en 2 et encore en 2. Ils pensent ainsi obtenir 12 morceaux de 25 cm chacun et avoir résolu le problème.

Groupe 3 :
Les élèves dénombrent rapidement les 12 arêtes et souhaitent découper chacune des 4 cornières en 3 morceaux. Il cherchent alors un nombre qui, multiplié par 3, donne 100.
Ces élèves raisonnent par des essais et ajustements : 25×3 ne donne pas 100, 15×3 ne donne pas 100, 35×3 ne donne pas 100, 40×3 ne donne pas 100.
Une élève propose de changer de stratégie et de prendre 40 cm, 30 cm et 30 cm : $40\,\text{cm} + 30\,\text{cm} + 30\,\text{cm} = 100\,\text{cm}$.



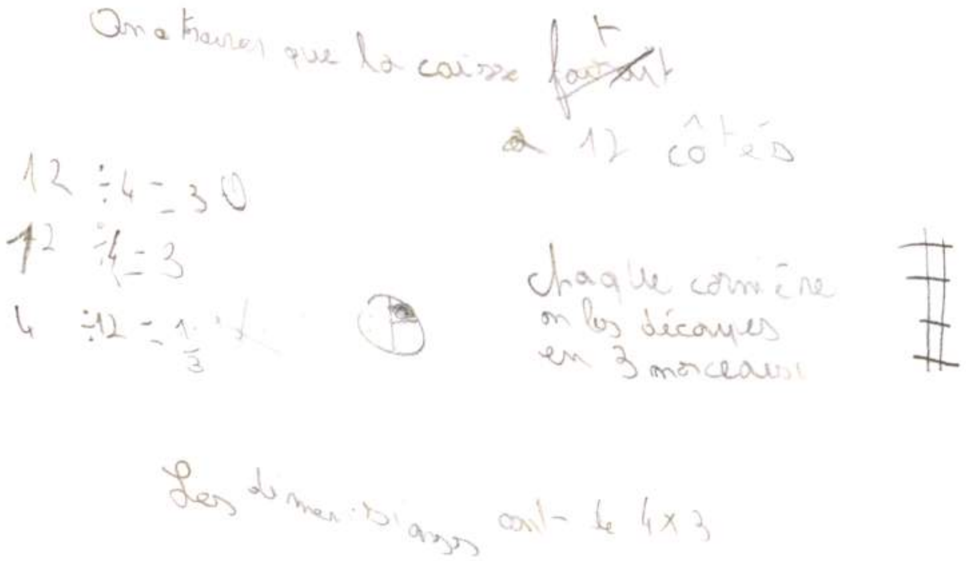
La réponse du groupe ne spécifie pas de quelle dimension il s'agit (caisse ou cornière) . Ce point pose problème au groupe et reste à éclaircir.

Groupe 4 :
Après discussion au sein du groupe, il est établi que l'opération à effectuer est $4 \div 12$. Cependant le groupe pose la division $12 \div 4$, trouve 3 et conclut « la dimension est 30 cm ».
En ce début de 6e, aucun élève du groupe ne sait faire ce calcul. Ils ne disposent pas de calculatrice et se tournent alors vers des multiplications posées : $\ldots \times 12 = \ldots$, tentant d'atteindre un produit égal à 400, en vain.



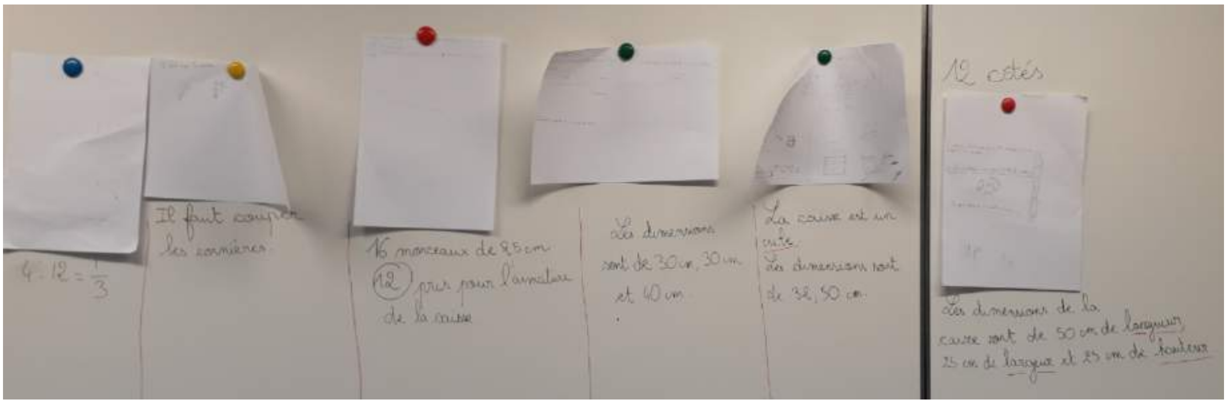
C'est la non obtention de 400 qui pousse le groupe à revenir sur le contexte de la tâche et le quotidien en s'interrogeant sur les chutes de matière possibles : « On peut jeter les chutes ou faire de la récupération ». Le groupe décide d'opter pour 32,50 cm.

Groupe 6 :
Le groupe s'accorde difficilement sur un modèle de caisse en débattant de la photo de l'énoncé (modèle cubique ou non cubique ?).
Ils calculent $4 \div 12$ à la calculatrice. L'affichage est alors la fraction $\frac{1}{3}$, interprétée comme 1,3. Cette réponse ne convient pas à l'un des élèves : « les arêtes ne peuvent mesurer 1,3 m ». Il poursuit : « $\frac{1}{3}$ c'est un rond coupé en trois. On va couper chaque cornière en 3 ».
Cette représentation est visible sur la production du groupe.



L’élève conclut que les dimensions sont 4×3, puisque $4 \times 3 = 12$.

Mise en commun (12’)
Lors de cette phase de synthèse des travaux de groupe, le professeur expérimentateur invite, l’un après l’autre, les groupes à venir exposer leur démarche, puis reformule la parole des élèves qu’il note sur le tableau. La fiche A3 de chaque groupe est aimantée au tableau lors de leur passage et reste affichée.



Les différentes démarches des élèves sont présentées succinctement, sans que le professeur expérimentateur ne les valide ou les invalide clairement. Nous observons que cette présentation déstabilise plusieurs élèves. Beaucoup d’entre eux n’ont pas envisagé le fait que le problème puisse avoir plusieurs solutions différentes. Aussi, lorsqu’un groupe vient présenter une solution différente de la leur, ces élèves doutent de la justesse de leur propre raisonnement.

D’autre part, le temps consacré à chaque groupe pour exposer son travail est court et la parole des élèves est difficile à comprendre pour quelqu’un qui n’a pas suivi le travail du groupe. Le professeur expérimentateur est amené à beaucoup reformuler le discours des élèves pour le rendre compréhensible par tous, ce qui provoque de la frustration chez certains d’entre eux qui ne peuvent pas exposer pleinement ce qu’ils ont préparé.

Alternatives :

- Ne pas faire passer tous les groupes, en sélectionner quelques-uns dont on approfondit l’exposé de la démarche, que l’on valide ou invalide clairement.
- Reporter la synthèse des travaux de groupes à une autre séance, de façon à prendre le temps

d'analyser les productions et d'articuler une synthèse cohérente avec l'activité des élèves.

Pause (10')

Pendant la pause, les stagiaires se concertent pour décider de la suite à donner à cette séance. Nous disposons encore d'une vingtaine de minutes de cours avec les élèves. Au travers de l'activité des élèves dans la phase de travail de groupe, deux pistes d'institutionnalisation se dessinent :

- Point de vue géométrique : revenir sur le vocabulaire du pavé (faces, arêtes, sommets) et sa représentation, identifier les arêtes de même longueur et les trois dimensions du pavé.
- Point de vue numérique : revenir sur les stratégies calculatoires donnant une solution au problème, sur les sens des opérations utilisées, sur les différentes écritures des nombres obtenues lors de ces calculs en particulier pour les quotients (décimales, fractionnaire).

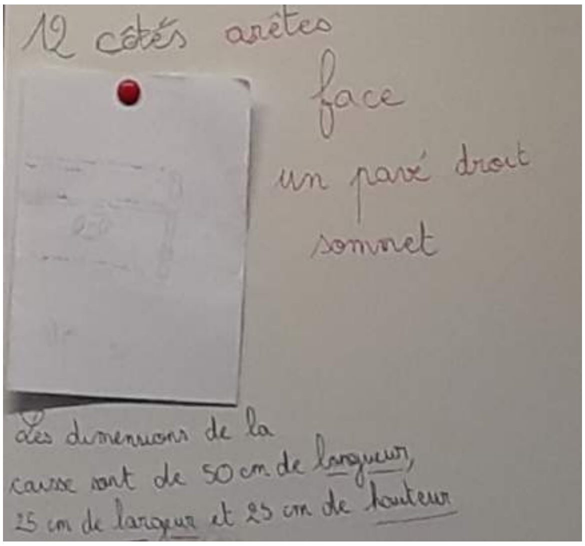
Compte tenu du peu de temps disponible, il est décidé collectivement de s'en tenir à l'institutionnalisation prévue initialement, c'est-à-dire institutionnaliser les connaissances géométriques relatives à cette situation. Tous s'accordent cependant sur la nécessité de consacrer une séance supplémentaire avec cette classe pour traiter l'aspect numérique et apporter une solution ou des solutions à ce problème.

Institutionnalisation (15')

Le professeur expérimentateur commence par revenir sur le vocabulaire utilisé par les élèves lors de la phase de synthèse de travaux de groupe : côtés/arêtes, rectangle/pavé.

Il fait préciser par les élèves la différence entre cube et pavé droit, en insistant sur le fait que le cube est un pavé droit particulier.

A l'aide d'un pavé droit, qu'il tient dans ses mains et qu'il montre aux élèves, il fait identifier par les élèves une arête, une face, un sommet du pavé.



Puis, les élèves sont invités à sortir leur cahier de mathématiques et à coller la fiche bilan qui leur est distribuée. Une lecture commentée du document est faite par l'enseignant. Il est ensuite demandé aux élèves de se munir de trois couleurs : rouge, vert, bleu. Une arête, un sommet et une face de chaque solide du document sont ainsi soulignés/coloriés d'une couleur spécifique. Si tous les élèves identifient rapidement sommet et arête, colorier une face du cube ou du pavé s'avère être un exercice compliqué pour plusieurs élèves de cette classe.

Pour conclure, le professeur expérimentateur demande aux élèves s'ils ont tous compris le vocabulaire « cube », « pavé », « arête », « sommet », « face ». Les élèves sont libérés.

Lors cette institutionnalisation, par faute de temps, il n'a pas été fait mention des dimensions du pavé, ni du fait qu'il existe trois groupes de quatre arêtes de même longueur.

A l’issue de cette expérimentation, le groupe de stagiaires s’accordent à dire que la phase d’institutionnalisation est frustrante, loin de l’activité des élèves, quelque peu déconnectée et qu’elle « ne va pas au bout ». Seuls le vocabulaire lié au pavé droit et le dénombrement des arêtes du pavé sont explicités. La notion de dimensions du pavé est complètement occultée, ainsi que toute l’activité numérique des élèves. D’autre part, à la fin de la séance, les élèves repartent sans que le problème ne soit résolu. A aucun moment, il n’a été dit si les réponses proposées sont correctes, ni évoqué le fait qu’il y ait plusieurs solutions.

Alternative : Après la pause, faire un bilan de la synthèse des travaux de groupe avant l’institutionnalisation. Demander aux élèves : « Qu’est ce qu’on cherchait dans ce problème ? Est-il résolu ? » . Éclaircir le fait que résoudre le problème consiste à trouver un triplet de nombres (longueur, largeur, hauteur), que plusieurs réponses sont possibles, que certaines donnent des pavés non cubiques, d’autres un cube.

A la suite de cette séance, il nous paraît important de consacrer les prochaines heures de cours avec cette classe pour :

— approfondir les démarches proposées par les élèves, les valider ou invalider,

— travailler la division (sens de l’opération, sens du quotient, sens du reste, technique pour poser cette opération)

— décrypter l’affichage de la calculatrice, le $4 \div 12 = 0{,}333333333$ et le $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Alternatives au scénario

Pour une prochaine expérimentation de cette situation dans nos classes, voici une proposition d’alternative de scénario :

Première séance

Phase 1 (5’) : Lecture collective de l’énoncé, et point sur le vocabulaire cornière et armature
Phase 2 (5’) : Travail individuel – les élèves écrivent leur démarche, leurs idées sur la feuille A5 de l’énoncé, si besoin la calculatrice est tolérée sans être pour autant évoquée explicitement
Phase 3 (30’) : Travail de groupe – Mutualisation et débat, sur une feuille A3 comportant en haut à gauche l’énoncé en format A5

Deuxième séance

Phase 4 (35’) : Synthèse des travaux de groupe – Au préalable, scanner, trier, hiérarchiser, sélectionner les différentes productions. Puis, projeter au tableau les travaux choisis en laissant le temps aux élèves de présenter à la classe leur procédure. Faire reformuler le reste de la classe pour s’assurer que l’idée exposée par le groupe est comprise des autres élèves. Valider ou invalider avec les élèves les démarches proposées. Faire ressortir les notions allant figurer dans la prochaine institutionnalisation.
Phase 5 (20’) : Institutionnalisation en lien avec l’activité réelle des élèves suivant plusieurs axes possibles (le vocabulaire autour du pavé et du cube, l’identification et le dénombrement des arêtes, sommets, faces, la représentation en perspective cavalière, les dimensions du pavé, la division, les écritures décimales et fractionnaires d’un quotient).

Dans une autre alternative de scénario, nous proposons aussi de traiter antérieurement avec les élèves le vocabulaire autour du pavé et du cube et de consacrer l’institutionnalisation à la notion de dimensions d’un pavé. Dans ces alternatives de scénarios avancées par les stagiaires, les points suivants nous paraissent particulièrement importants :

- consacrer une phase à la recherche individuelle après un débat de classe sur le vocabulaire de l'énoncé,
- Effectuer un bilan de synthèse des travaux de groupe, validant clairement les réponses des élèves et donnant lieu à une conclusion écrite de l'activité,
- Modifier l'institutionnalisation pour faire ressortir les 3 triplets de nombres (longueur, largeur et hauteur), sans nécessairement expliciter le vocabulaire mais avec un code couleur sur une vraie perspective cavalière.

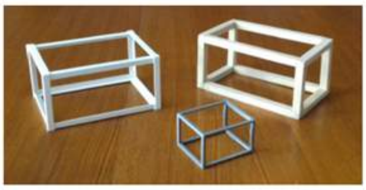
4 Grille d’interventions possibles de l’enseignant

Les deux collectifs ont recherché des interventions jugées pertinentes qu’ils pourraient mener dans leur scénario relativement à un blocage surgissant dans le travail de l’élève.

Le tableau suivant présente les interventions prévues pour les phases de lecture de l’énoncé et de travail individuel.

Déclencheur d’intervention	**Propositions d’interventions**	**Effets attendus, buts**
Question sur les mots *cornière* et *armature*.	Renvoyer la question à la classe, demander aux élèves de reformuler ces mots. Si pas de réponse, dire « tige en métal qui protège les bords ». Renvoyer à la photo de la caisse de l’énoncé, identifier sur la photo où sont situées les cornières. Montrer une cornière de grosseur raisonnable à la classe. Faire manipuler une cornière de manière ciblée dans un groupe si la difficulté persiste	
Le mot *dimension* pose problème.	Sans expliciter le mot « dimensions », se contenter de dire « quelque chose qui se mesure ». Dire quelque chose du type : « On veut faire entrer une armoire dans la salle, il faut savoir combien elle mesure (il faut connaître ses dimensions) ? »	Débloquer l’élève sans pour autant trop en dire

Les tableaux suivant présentent les interventions prévues pour la phase de travail en groupe.

Déclencheur d'intervention	**Propositions d'interventions**	**Effets attendus, buts**
Lors du travail de groupe, le mot dimension pose encore problème	Relire la consigne au groupe en insistant sur LES dimensions. Expliciter si besoin, le nombre de dimensions de la caisse puis faire émerger le vocabulaire longueur, largeur, hauteur. Passer par les dimensions d'un rectangle pour faire ressortir longueur et largeur. Puis questionner sur les dimensions de la caisse.	
Les élèves ont besoin de se représenter le « 1 m » pour imaginer une stratégie.	Leur donner accès à la règle de « 1 m » du tableau du professeur.	
Un élève annonce : « La dimension est 4 m. » → confusion avec longueur totale des arêtes.	Questionner l'élève sur la signification du mot dimension.	
Un élève place les cornières de sorte à constituer un carré de 1 m de côté.	Donner une réponse du type : « As-tu obtenu une caisse dans laquelle tu peux mettre des choses dedans ? ». Puis, demander, en montrant la photo de l'énoncé : « Où sont placées les cornières ? » Si le blocage persiste, dire alors : « On peut couper les cornières. »	Retour sur la caisse comme objet du quotidien pour invalider le carré. → Les élèves commencent à couper les cornières.
Dénombrer les arêtes de la caisse. Percevoir les arêtes cachées.	Faire manipuler un solide (boîte à mouchoirs) ou une maquette en fil de fer. Sur l'énoncé ou sur la photo d'une maquette, ou sur une représentation d'un pavé en perspective, mettre en couleur les arêtes.  Projeter une animation GeoGebra.	

Déclencheur d'intervention	Propositions d'interventions	Effets attendus, buts
Après dénombrement des arêtes validé, difficultés à proposer un découpage des cornières en 12 morceaux de longueurs adaptées.	Proposer une représentation en perspective d'un pavé droit (photo ou schéma) et demander de mettre en couleur les arêtes de même dimension.	
Des problèmes pour effectuer les calculs sont décelés dans un groupe.	L'enseignant propose une calculatrice.	Débloquer, sans freiner une démarche qui serait prometteuse.
La calculatrice affiche 33,3333333333 lors du calcul de $400 \div 12$ ou $100 \div 3$. Les élèves ne comprennent pas l'affichage. Les élèves ne savent pas quelle précision choisir.	En CM1, seule la partie entière a du sens : on dira par exemple 5 cm et 2 mm et non pas 5,2 cm. Les questionner sur la signification de cette partie entière. En CM2 et en 6^{e}, demander d'interpréter 33,3 en donnant du sens au chiffre des dixièmes : $33{,}3\,\text{cm} = 33\,\text{cm} + \frac{3}{10}\,\text{cm} = 33\,\text{cm} + 3\,\text{mm}$ Puis, les questionner sur la signification de 33,33.	Donner du sens à l'écriture décimale d'un nombre. Interpréter chacune des décimales d'une écriture décimale.

Déclencheur d'intervention	Propositions d'interventions	Effets attendus, buts
La calculatrice affiche $\frac{1}{3}$ lors du calcul de 400 ÷ 12 ou 100 ÷ 3 ou 4 ÷ 12 ou 1 ÷ 3.	Revenir à la signification de la fraction partage. Puis, valider la réponse $\frac{1}{3}$ m comme réponse possible au problème.	Comprendre le sens de l'affichage. Faire prendre conscience que $\frac{1}{3}$ est un nombre.
Les élèves ne comprennent pas l'affichage.	Outiller l'élève sur les fonctionnalités de sa calculatrice, en lui montrant la touche utile pour obtenir une écriture décimale approchée.	Permettre à l'élève d'obtenir une écriture décimale.
L'élève tente de résoudre une multiplication de type : 12 × … = 400 ou 3 × … = 100, par essais et ajustements, sans parvenir à atteindre l'égalité.	L'interroger sur le sens des nombres qu'il a trouvés et qu'il aurait invalidés, par retour au quotidien : « pour construire une caisse, de quelle précision as-tu besoin ? ». Si l'élève n'a pas pensé ou ne s'autorise pas à laisser des chutes : •lui demander : « Est-on obligé d'utiliser la longueur totale des cornières ? » •lui demander : « Les morceaux doivent-ils être tous de la même longueur ? »	Travail sur le sens de l'écriture décimale d'un nombre. En autorisant les chutes, on valide la possibilité d'obtenir une caisse cubique. En n'autorisant pas les chute, on oriente vers une caisse non cubique.

5 Le mot de l'équipe de formation-recherche

Relativement à la situation, nous proposons ici de faire un retour sur la notion de dimensions et les différents types de géométrie en jeu dans le cursus d'un élève. Enfin nous renvoyons le lecteur à l'intégralité des apports, en particulier sur la déconstruction dimensionnelle disponibles dans le diaporama présenté en formation et accessible sur le site de l'IREM de Rouen.

Dimensions

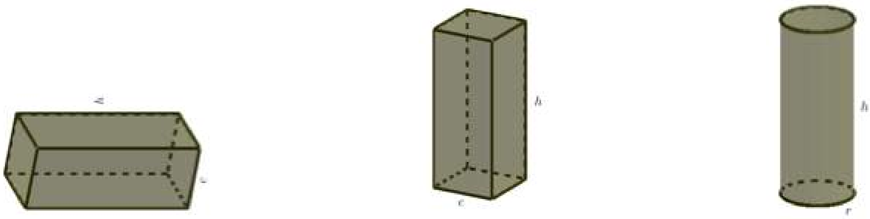
Le mot dimension fait référence à plusieurs concepts distincts mais non disjoints :

— D'une part les dimensions d'un objet qui caractérisent sa taille et l'occupation de l'espace de cet objet (*size* ou *measurement* en anglais), les dimensions sont alors des longueurs.

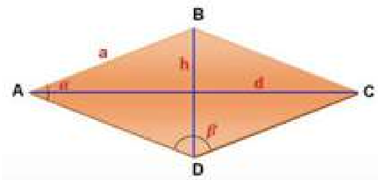
— D'autre part les dimensions en tant qu'objet géométrique (dimension d'un espace), le carré est de dimension 2 alors que le cube est de dimension 3, etc.


Pour notre situation, les dimensions sont un triplet de trois longueurs (la longueur L, la largeur l et la hauteur h). Elles peuvent se réduire à un couple dans le cas d'un pavé à base carrée (le côté c et la hauteur h) et même à une seule dimension dans le cas du cube (le côté c).

Les dimensions d'un objet permettent de le caractériser. L, l et h ne sont pas nécessairement interchangeables dans la vie réelle.



Les noms utilisés peuvent varier. Si une mesure est un nombre, les dimensions sont, elles, des grandeurs : rayon ou diamètre de base et hauteur pour un cylindre, arête pour un cube, côté pour un carré. Des mesures d'angles peuvent aussi intervenir (exemple du losange).



Les systèmes de description ne sont pas uniques.

Types de géométrie

La situation fait intervenir deux espaces :

- L'espace sensible (le monde réel) constitué d'objets concrets (ici la caisse).
- L'espace géométrique constitué d'objets idéaux qui peuvent être représentés par des figures (ici un pavé droit).
  Le passage d'un espace à l'autre fait appel à une modélisation.

Les élèves sont appelés, selon les attentes institutionnelles, à rencontrer plusieurs types de géométrie, la géométrie perceptive, puis la géométrie instrumentée avant la géométrie déductive.

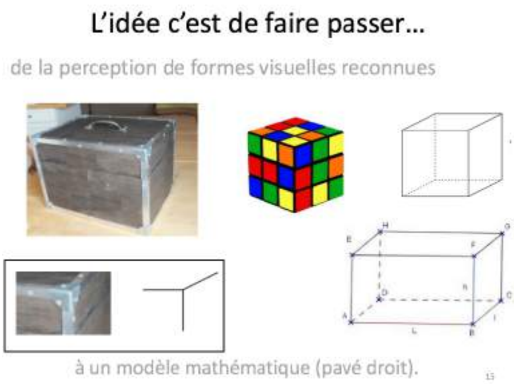
Pour l'élève, contrôler les propriétés d'une figure par exemple se fera successivement :

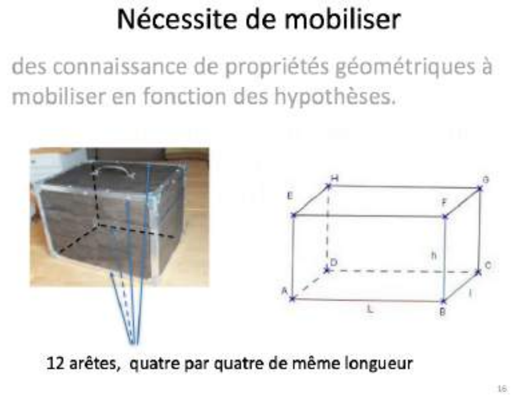
- par la vue, la manipulation aux cycles 1 et 2
- par les instruments en fin de cycle 2 et cycle 3
- par les axiomes et théorèmes au collège et au lycée.

Nous renvoyons le lecteur à un article sur les paradigmes en géométrie précisés par Houdement C. & Kuzniak A. (2006). Il permet d'éclairer l'enseignant sur des malentendus didactiques qui peuvent se produire quand il s'agit de travailler la géométrie en classe.

Un des enjeux est ici, à travers cette situation, de faire évoluer le regard de l'élève en géométrie, en le faisant passer de la perception de forme visuelle à un modèle mathématique.

Cela nécessite de mobiliser des connaissances de propriétés géométriques en fonction des hypothèses. Tout ceci est précisé dans le diaporama mis en ligne sur le site de l'IREM [4] de Rouen.





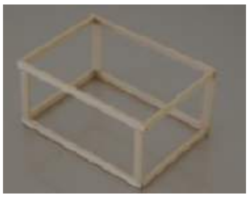
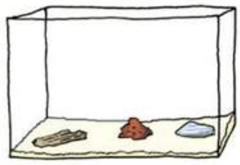
De plus, la situation fait appel à la déconstruction dimensionnelle définie par Duval (2005) comme suit :

> Le rapport des élèves aux figures est l'un des points clé de leur entrée dans la géométrie. Mais c'est aussi le lieu de profondes équivoques didactiques.
> En effet, l'organisation des objectifs d'enseignement, dès le primaire, donne la priorité aux droites, a leurs relations, a leurs propriétés. Et c'est en fonction de celles-ci que l'on fait travailler sur quelques figures de base (triangle, carré....). Cela conduit a valoriser les figures « un D » (1D)[2] ou les configurations de figures 1D (droites parallèles, droites perpendiculaires) par rapport aux figures 2D ou, tout au moins, a les mettre sur le même pied.
>
> Or un tel ordre d'introduction des connaissances se heurte a la manière dont les figures sont perçues et interprétées en dehors des mathématiques. Ce qui, d'emblée, est reconnu comme une forme 2D, ne se décompose pas perceptivement en un réseau de formes 1D. Autrement dit, il y a une priorité cognitive des figures 2D sur les figures 1D. Quant aux points n'en parlons pas ! Hormis les sommets de polygones, ils ne sont visibles que par une marque qui les désigne. Autrement dit, la déconstruction dimensionnelle des formes impliquée par l'introduction des connaissances géométriques va a l'encontre des processus spontanés d'identification visuelle des formes.

Extrait Grand N, 76, p.7 Duval R. & Godin M., 2005

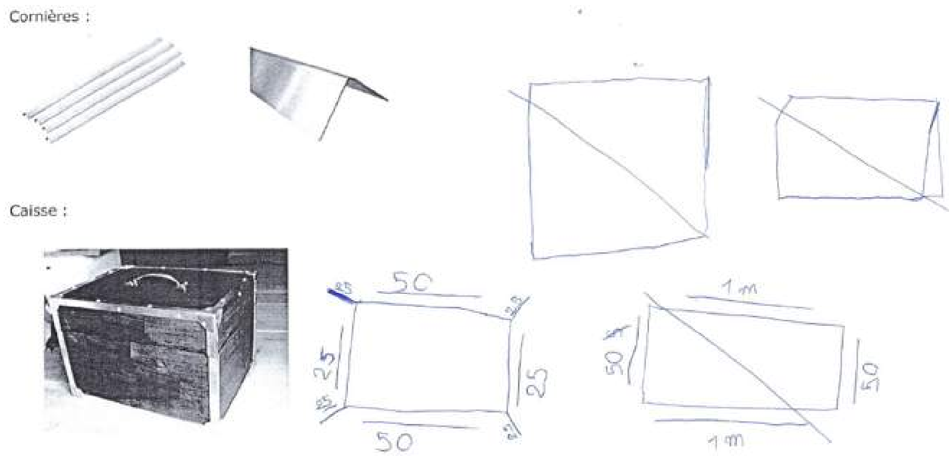
Il s'agit ici de ne pas percevoir le pavé droit représentant la caisse seulement comme un tout (3D), mais comme un agencement d'arêtes représentant les cornières (1D). Le passage d'une photographie de caisse à la manipulation d'un solide en fil de fer peut aider à une telle reconsidération du solide, tout comme aurait pu aider un autre énoncé autour d'un aquarium présenté comme suit :

4. http://irem.univ-rouen.fr/node/lessons/04

En effet, la résolution nécessite une déconstruction dimensionnelle dans l'identification des segments (1D) : les douze arêtes qui composent l'armature de la caisse, et pas seulement comme un réseau de faces parallèles (2D) ou un pavé droit (3D).

Voici des tentatives de passage de 3D à 2D observées dans des brouillons d'élèves



Et du passage de 3D à 1D :

Ce jeu de couleurs se retrouve aussi dans une classe de CM2 où une enseignante a testé cette situation et où les élèves pouvaient disposer de solides en bois (Annexe C).

Sa résolution nécessite aussi :

- de repérer que ce solide est constitué d'un assemblage de segments pouvant avoir différenteslongueurs égales deux à deux
- de traduire la contrainte de la somme des longueurs des arêtes égale à 4 mètres.

6 Conclusion

En conclusion, cette situation est très riche dans la diversité des points qu'elle permet d'aborder en classe. Si elle fait appel à la géométrie pour modéliser la caisse, elle mobilise les grandeurs et mesures à travers « les dimensions ». Elle permet de soulever des questions telles que « le cube est-il un pavé droit ? ».

C'est aussi l'occasion de donner du sens aux nombres par le biais des grandeurs et de revenir sur les notions de valeur approchée et valeur exacte.

La découpe et l'agencement des cornières pourront aiguiser l'esprit critique chez les élèves, et par exemple remettre en question le triplet (40, 57, 3). Si ce triplet convient mathématiquement, de façon concrète, un retour au quotidien viendrait questionner l'utilité d'une telle caisse.

L'arithmétique est aussi présente dans les démarches de résolution car il s'agit de trouver des solutions à une équation à trois inconnues. Elle permet par exemple de réactiver la division et peut aussi être un support de travail sur le nombre, en particulier les fractions.

Pour un élève de cycle 2 ou 3 cette situation permettra de rencontrer un problème qui a une multiplicité de solutions. Si l'on se place dans le cadre de solutions entières, on pourra s'attarder sur l'écriture de 100 comme somme de trois entiers et revenir ainsi sur la décomposition additive afin de trouver plusieurs solutions. On pourra à l'occasion montrer qu'il n'y a pas de solution entière lorsque les trois entiers sont égaux, ou encore que le problème admet une infinité de solutions dès que l'on admet toutes les solutions décimales.

L'ancrage autour d'une caisse permet ensuite de travailler sur la grandeur volume. Enfin elle revêt un aspect algébrique qui pourra aussi être exploré plus tardivement en fin de collège ou au lycée. Une suggestion de prolongement en classe de seconde est proposée en Annexe D.

Les diverses expérimentations menées ont montré que les élèves parvenaient à s'engager dans un travail mathématique à partir d'un problème d'apparence simple.

Nous espérons que ce cahier vous aura donné envie d'investir le champ des mathématiques à travers la situation de la caisse ou d'autres situations issues du quotidien, développées dans nos autres cahiers de Lesson Study.

Remerciements

L'équipe de formation-recherche tient à remercier non seulement les acteurs de terrain investis dans cette Lesson Study (élèves et enseignants impliqués dans la formation), mais aussi les acteurs de l'ombre sans qui ce type de formation n'aurait pas vu le jour, à savoir, particulièrement Nicolas Gendreau de l'Inspection Régionale de Mathématiques de l'Académie de Rouen, ainsi que les deux équipes de direction administratives respectives des collèges Pierre-Mendès-France (Lillebonne) et Henri-Matisse (Grand-Couronne). Nous tenons à remercier les membres du LDAR impliqués de près ou de loin dans cette formation d'un nouveau genre, et tout particulièrement Michèle Artigue pour son éclairage et son expertise scientifique mis au profit de nos formations.

Bibliographie

J. Dewey (1938). Democracy and Education (traduction française (2011) Démocratie et Education, suivi de Expérience et Education. Paris : Armand Colin).

Mathématiques et quotidien, Document Ressources Transversales (2016), MEN, en ligne sur le site ÉduSCOL [5]

M. Van den Heuvel Panhuizen & P. Drijvers (2014). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 521-525). New-York : Springer.

L. Verschaffel, B. Greer, & E. de Corte (2000). Making Sense of Word Problems. Swets & Zietlinger Publishers.

Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : IREM de Poitiers [6], Groupe Collège.

Enseigner les mathématiques au cycle 4 à partir des grandeurs : Les Longueurs, (2016), IREM de Poitiers, Groupe Collège.

Grandeurs. N° Spécial. Repères-IREM n°68, 2007. (Article en ligne sur le Portail des IREM)

C. Houdement, C. & A. Kuzniak, Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. Annales de didactique et de sciences cognitives, 2006, 11, pp.175-193.

CII IremTICE, Créer avec Geogebra, Exemples de réalisations & fiches techniques pour des mathématiques dynamiques, Cassini, 2016

R. Duval, M. Godin, Les changements de regard nécessaires sur les figures, Grand N, n°76, pp.7-27

M. Rousselet, La programmation facile avec Scratch, Ellipses, 2017

5. http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Ressources_transversales/99/8/RA16_C3_C4_MATH_math_et_quotidien_600998.pdf
6. http://irem.univpoitiers.fr/portail/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=61&filter_tag[0]=&Itemid=1

Annexes

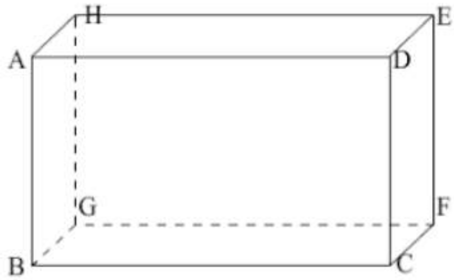
Annexe A : Autour de la validation des résultats (Groupe2, Lesson Study, Lillebonne)

Alexis représente sans difficulté un pavé en perspective et propose la solution 50x8x40. L'enseignante (P) lui demande d'inscrire ces dimensions sur son dessin, puis lui pose la question volontairement évasive « Et ça, ça marche ou ça ne marche pas ? », sous-entendu peut-on construire la caisse avec les 4 m et reste-t-il des chutes ?. Alexis répond alors : A - Ben, ça marche.
P - Et comment sais-tu que ça marche ?
A - Ben, j'ai fait les calculs.
P - C'est quoi ton calcul ?
Il finit par s'expliquer 8+8+8+8+40+40+…et prétend avoir trouver 1 m.
P - 1 m en tout ?
A - Euh…4 m.
Jules tend la calculatrice à Alexis tandis que l'enseignante lui demande de vérifier son calcul. Il s'empare de la calculatrice et elle lui demande alors d'écrire son calcul. Pour Alexis, il y a contradiction entre ces deux injonctions : vérifier ou écrire ? Ça n'a pas le même statut ! Il résiste. Alors l'enseignante utilise des stratagèmes qui vont tous échouer :
P - Pour t'en rappeler.
A - Mais je les connais
P - Toi oui, mais les autres ?
Alexis n'écoute plus. Les autres, ce n'est pas son problème. Alors l'enseignante questionne les autres. Ont-ils compris ce qu'Alexis a fait ? En fait il y a deux questions : « Comment Alexis a fait pour trouver ses dimensions ? »et « Comment peut-on les vérifier ? »que l'enseignante mêle sans cesse. S'en rend-elle compte à ce moment ?

Ceci est relaté dans l'extrait vidéo précédent.

Annexe B : Compréhension de la perspective cavalière

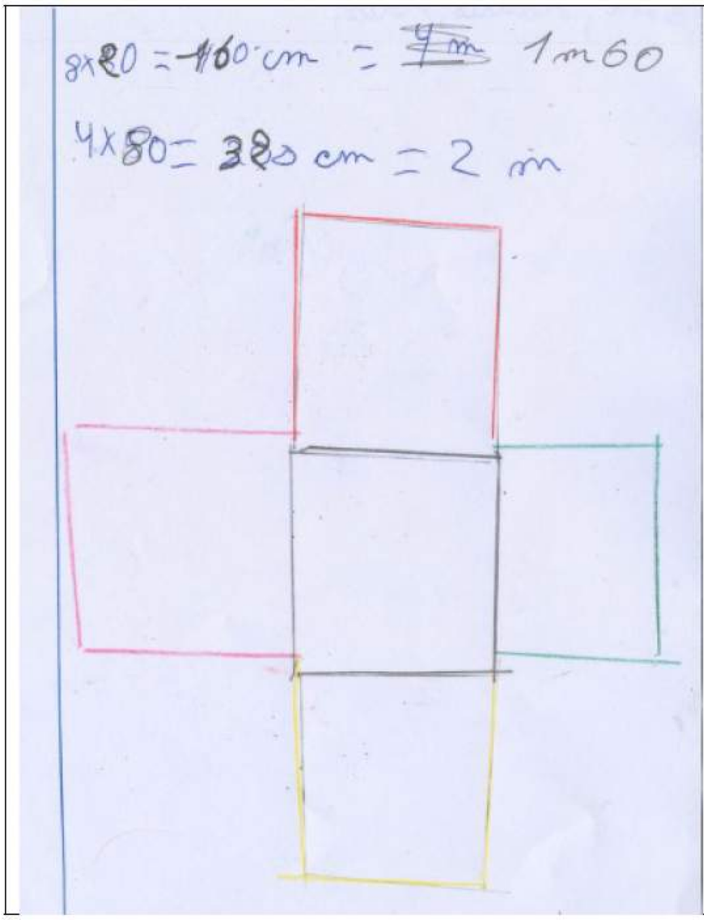
Idée de montrer un pavé droit, de projeter une représentation en perspective cavalière d’un pavé droit, de demander de décrire cette représentation, et de donner un tableau à compléter, comme par exemple :

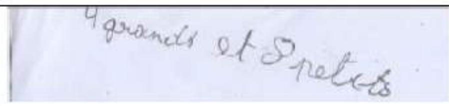


Compléter le tableau suivant par Vrai ou Faux.

		Dans la réalité	Sur le dessin
	Les droites (AB) et (AH) sont perpendiculaires.		
	Les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires.		
	Les droites (AH) et (AD) sont perpendiculaires.		
	Les droites (DC) et (HG) sont parallèles.		
	Les droites (AH) et (BG) sont parallèles.		
	Les droites (AD) et (EH) sont parallèles.		
	AB = CD = EF = HG		
	AD = BC = GF = HE		
	AH = BG = CF = DE		

Annexe C : Un exemple de manipulation dans la classe de CM2 de Claire





Ils ont commencé par dessiner un pavé puis ont pris un solide en bois plein et ont coloré les arêtes de la même dimension avec de la craie de différentes couleurs.

Ils ne sont pas allés jusqu'au bout de leur raisonnement.

Annexe D : Vers un prolongement algorithmique en classe de seconde…

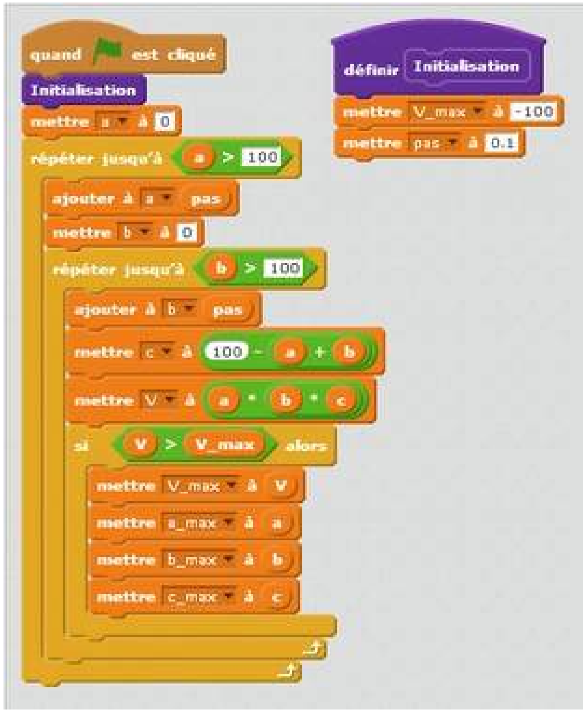
Volume de la caisse – Recherche du volume maximum

Le volume de la caisse est une fonction de deux dimensions de la caisse :

$$V(a,\ b) = a \times b \times (100–a–b)$$

L'étude des fonctions qui apparait dans le programme de seconde ne donne pas les outils pour trouver un extremum d'une fonction de deux variables. Le tableur, même s'il donne des résultats, n'est pas non plus l'outil adapté (tableau 2D). En revanche, l'algorithmique, en faisant varier a et b, permet de balayer localement « toutes » les valeurs possibles de V et d'en déduire le volume maximum.

Scratch donne de bons résultats :



Volume_ max_ 2.0.sb2 ou Volume_ max_ 1.0.sb2 (avec listes)

La variable *pas* permet de régler la précision avec laquelle on passe en revue les dimensions. La *complexité* de cet algorithme est une fonction de ce pas. Un pas de 0.01 fait tourner le programme Scratch beaucoup trop longtemps.

En arrière plan, nous avons le schéma d'un algorithme qui trouve un extremum local d'une fonction de deux variables. Dans notre cas, a et b varient de 0 à 100 mais on peut rendre plus locale la recherche (gain de temps de calcul, vers plus de précision) en faisant varier a et b entre 30 et 35 par exemple (voir Volume_ max_ 3.0.sb2 avec un pas de 0.01).

Le logiciel Python peut aussi être envisagé.