Cahier de Lesson study n°1

Année 2016-2017

Le jeu du Lièvre et de la Tortue :

une situation, plusieurs scenarii

Co-écrit par :
Les enseignants stagiaires participant à ces Lesson study en 2016-2017,

L'équipe de formation-recherche :
Hélène Declercq (Groupe "Activités", IREM de Rouen)
Sylvain Duthil (Groupe "Activités", IREM de Rouen)
Frédéric Hartmann (Groupe "Activités", IREM de Rouen)
Blandine Masselin (Groupe "Activités", IREM de Rouen, LDAR)
Charlotte Derouet (ESPE de Paris, LDAR)

Avec le soutien de :
Nicolas Gendreau (IA-IPR de l'Académie de Rouen-Caen)

1. Introduction

La situation « le lièvre et la tortue »

L'équipe de formation-recherche a proposé la situation du lièvre et de la tortue suivante :

Le jeu du lièvre et de la tortue

Une course se passe entre un lièvre et une tortue.
On dispose d'un parcours à 6 cases en ligne.
On lance un dé équilibré à 6 faces.
Si le 6 sort, le lièvre gagne, sinon la tortue avance d'une case.
La tortue gagne quand elle arrive sur la 6ème case.

Qui a le plus de chances de gagner?

Deux lesson study ont été menées en parallèle autour de cette situation et seront dévoilées dans ce document.

Calcul des probabilités, estimation des probabilités à l'aide des fréquences ou les deux ?

Cette situation permet au moins deux approches, celle fréquentiste ou celle laplacienne.
Voulons-nous déterminer les probabilités par le calcul ou par un passage par des relevés statistiques avec des lancers de dés à la main, ou encore en faisant usage de la simulation afin d'estimer les probabilités par les fréquences observées de victoires des animaux ?
Le(s) choix aura(ont) évidemment des conséquences sur l'activité de l'élève et de l'enseignant. Chacun aura une visée différente (travailler le calcul des probabilités, écrire et utiliser un algorithme, réinvestir la loi des grands nombres) et mobilisera divers registres sémiotiques.
Avant d'exposer deux choix différents fait par deux collectifs d'enseignants pour une classe de troisième, voici un tour d'horizon des programmes actuels.

BO et Compétences au cycle 4 et en seconde

Voici les attendus au collège en probabilités.

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités	
Aborder les questions relatives au hasard à partir de problèmes simples. Calculer des probabilités dans des cas simples. » Notion de probabilité. » Quelques propriétés : la probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1 ; probabilité d'évènements certains, impossibles, incompatibles, contraires.	Faire le lien entre fréquence et probabilité, en constatant matériellement le phénomène de stabilisation des fréquences ou en utilisant un tableur pour simuler une expérience aléatoire (à une ou à deux épreuves). Exprimer des probabilités sous diverses formes (décimale, fractionnaire, pourcentage). Calculer des probabilités dans un contexte simple (par exemple, évaluation des chances de gain dans un jeu et choix d'une stratégie).

Pour l'algorithmique au collège, le B.O. précise ceci :*"Écrire, mettre au point et exécuter un programme simple"*.
Il mentionne les connaissances et compétences associées suivantes :

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Décomposer un problème en sous-problèmes afin de structurer un programme ; reconnaître des schémas. Écrire, mettre au point (tester, corriger) et exécuter un programme en réponse à un problème donné. Écrire un programme dans lequel des actions sont déclenchées par des événements extérieurs. Programmer des scripts se déroulant en parallèle. » Notions d'algorithme et de programme. » Notion de variable informatique. » Déclenchement d'une action par un évènement, séquences d'instructions, boucles, instructions conditionnelles.	Jeux dans un labyrinthe, jeu de Pong, bataille navale, jeu de nim, tic tac toe. Réalisation de figure à l'aide d'un logiciel de programmation pour consolider les notions de longueur et d'angle. Initiation au chiffrement (Morse, chiffre de César, code ASCII…). Construction de tables de conjugaison, de pluriels, jeu du cadavre exquis… Calculs simples de calendrier. Calculs de répertoire (recherche, recherche inversée...). Calculs de fréquences d'apparition de chaque lettre dans un texte pour distinguer sa langue d'origine : français, anglais, italien, etc.

Comme cette situation du lièvre et de la tortue peut aussi s'envisager au lycée, nous précisons des éléments du programme de la classe de seconde, concernant les probabilités.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Probabilité sur un ensemble fini		
Probabilité d'un événement.	• Déterminer la probabilité d'événements dans des situations d'équiprobabilité. • Utiliser des modèles définis à partir de fréquences observées.	La probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent. Pour les calculs de probabilités, on utilise des arbres, des diagrammes ou des tableaux.
Réunion et intersection de deux événements, formule : $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.	• Connaître et exploiter cette formule.	

Les six compétences mathématiques du collège *chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer* peuvent intervenir dans la réalisation de tâches autour de cette situation.

2. Analyse a priori

Objectifs

L'idée est, à partir d'un jeu aux règles énoncées, de faire reconnaitre le caractère aléatoire de cette situation et ainsi amener les élèves à mobiliser les probabilités (que ce soit en terme d'expérimentations avec des dés, d'estimation de probabilités à l'aide de simulations ou de calculs de probabilités) pour traiter cette situation complexe impliquant le hasard.

Connaissances mises en jeu

Dans chaque atelier préparant une lesson study, deux groupes d'enseignants ont dégagé des objectifs et des éléments d'analyse *a priori* de la situation du lièvre et de la tortue.

	G1	G2
Connaissances maths en jeu	Notions de probabilité, de fréquence Notion de hasard, notion de fraction	Notion de hasard, d'expérience aléatoire, Issues, événements, Stabilisation des fréquences->probabilité , approche fréquentiste 6ème Liste des issues possibles Lycée : Dé équilibré->équiprobabilité, Et
Dimension vie quotidienne	Jeu d'élaboration de stratégie pour jeu de hasard	jeu de hasard-quotidien avantage pour entrer en activité-> énoncé plus manipulation ➔ Une vidéo de présentation+Film
Place dans la progression	Peut être en introduction de l'approche fréquentiste	Cycle 3 (en 6ème) si expert en problème ouvert Cycle 4 (en 3ème) Stabilisation des fréquences->probabilité (réinvestissement) Objectifs 3ème événement contraire, calcul fractionnaire Problème ouvert + ou - prise d'initiative 1ère-2nde arbre de probabilités , conditionnement, suites géométriques
Dimension TICE	Avec Scratch, faire un programme avec deux lutins et lancer aléatoire d'un dé	Simulation ->scratch (image) ->calculatrice ->geogebra (lycée) préparer une illustration par P des règles du jeu (film) geogebra ( ) et calculatrice car très souvent présente
Démarches possibles des élèves	Faire des essais en jouant et noter les résultats (échantillon) Programmer sous Scratch Tableur s'ils savent l'utiliser	Entrer en action-> faire la partie-> compter dénombrer Lister toutes les issues possibles
Difficultés et erreurs possibles	Croyance que le lièvre gagne car il aurait cinq chance sur 6 de faire un six Ça dépend de qui commence. Difficulté du nombre de cases (1 case : 1/6 et 5/6, 2 cases ?)	Compréhension de l'exercice ->du jeu ->énoncé : démarrage à la case 1 ou case 0 ? trop de « 6 » dans l'énoncé (var didactique) « six », « constellation du 6 » mot « chance » qui peut être problématique problème de calculer et choix /Sens de l'opération sens du mot « dé équilibré »

La grille produite dans le deuxième atelier d'enseignants est en lien sur le site de l'IREM.

Voici des compléments de l'équipe de formation-recherche, issus de deux expérimentations préalables.

Mathématiques	Notion de probabilité
	Méthode de calcul d'une probabilité : fréquentiste * Calcul d'une fréquence * Réaliser un échantilon suffisamment grand
	Méthode de calcul d'une probabilité : théorique (avec l'équiprobabilité) * Se placer dans un modèle convenable, qui permet d'utiliser des résultats liés à l'équiprobabilité * Calculer la probabilité d'un événement dans le cas d'issues équiprobables
TICE	Simuler une expérience aléatoire avec le tableur : lancer un dé, jouer une course, déterminer le gagnant
	Organiser la feuille de calcul pour conduire la simulation
	Fonctions ALEA.ENTRE. BORNES, NB.SI, SI
	Scratch Instructions conditionnelles "*Si alors sinon*", boucle "*Répéter*", variables, listes
Quotidien	Plateau de jeu de société, dé à jouer Compréhension de l'expression " si ...alors... sinon ..." Remarque : "alors" est implicite dans l'énoncé donné en formation.

Procédures possibles des élèves (justes ou erronées)

Démarches (dont certaines erronées)	**Documents d'appui disponibles sur le site.** http://irem.univ-rouen.fr/node/lessons/01
Choix péremptoire d'un gagnant : • Le lièvre car il peut gagner en une seule fois • La tortue car elle a plus de chances d'avancer • La tortue car il est difficile de faire un 6 en lançant un dé, le 6 ne sort jamais ou moins souvent que les autres faces • Une chance sur deux : ils sont deux à jouer, ils ont autant de chance de gagner Avec un dé, réaliser réellement des courses lièvre/tortue, noter les victoires de l'un et de l'autre, calculer les fréquences des victoires pour un petit échantillon de parties Avec le tableur, simuler une course en « lançant un dé autant que nécessaire » → difficile à programmer mais correspond à la situation proposée : • Réaliser un grand échantillon de courses, • Compter les victoires, • Calculer les fréquences des victoires	Brouillon de Mendy Ne persiste pas lors du travail de groupe. Vidéo Kévin Vidéo Gloria
Avec le tableur, simuler une partie en « lançant six dés une seule fois » → plus facile à programmer mais demande une modélisation qui ne correspond pas exactement à la situation proposée : • Réaliser un grand échantillon de courses, • Déterminer qui gagne, • Compter les victoires, • Calculer les fréquences des victoires	Fichier tableur2modèles
Avec Scratch, simuler un grand nombre de parties et dénombrer les victoires lièvre et tortue	Fichiers Scratch1Course Scratch2Fréquences Scratch3ListeFréquences ScratchSimulationElève4e SimulationATrous SimulationScratch
Avec le tableur, réaliser les 46 656 cas possibles de parties et déterminer la proportion de parties gagnées.	Fichier Tableur46656cas
Avec des arbres pondérés, faire des produits des probabilités sur les branches.	Manuels (ex énoncé)
Dénombrement (arbre ou algorithme en langage naturel), dénombrer le nombre de victoires de la tortue ou celles du lièvre parmi toutes les parties possibles et déterminer la proportion de parties gagnées (équiprobabilité)	Brouillon de Thomas
Tentative d'un calcul des probabilités avec biais de linéarité : $\frac{1}{6}\times 6 = \frac{6}{36}$	Brouillon de Yasmine

3. Déroulement des deux lesson study

Première lesson study

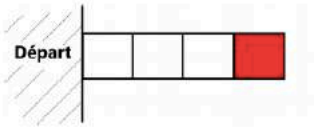
Déroulement envisagé

Voici l'énoncé donné aux élèves :

LE JEU DU LIÈVRE ET LA TORTUE

Une course se passe entre un lièvre et une tortue.

On dispose du parcours suivant :



On lance un dé équilibré à six faces.

Si le **6** sort, le lièvre gagne, sinon la tortue avance d'une case.

La tortue gagne quand elle arrive sur la dernière case.

Qui a le plus de chances de gagner ?

Le départ est indiqué. Un plateau de jeu permet de simplifier la compréhension de la règle (marelle). Pour lever l'ambiguïté de la case d'arrivée (sortir du plateau ou dernière case), elle est représentée en rouge. Le nombre de cases (4 au lieu de 6) a été choisi pour que les probabilités de victoire de la tortue et du lièvre soient le plus proche possibles $(\frac{5}{6})^4 \approx 0{,}48$ et $1 - (\frac{5}{6})^4$ ≈0,52, ce qui peut engendrer un débat dans la classe.

Disposition de la classe : des groupes de quatre élèves, hétérogènes et par affinités, avec des tables regroupées avant l'entrée des élèves en classe.

Phase 1 : (10 à 15 min) Introduction du problème → s'assurer de la compréhension de la règle. Pas d'ordi à dispo. Les dés sont présents sur les tables.

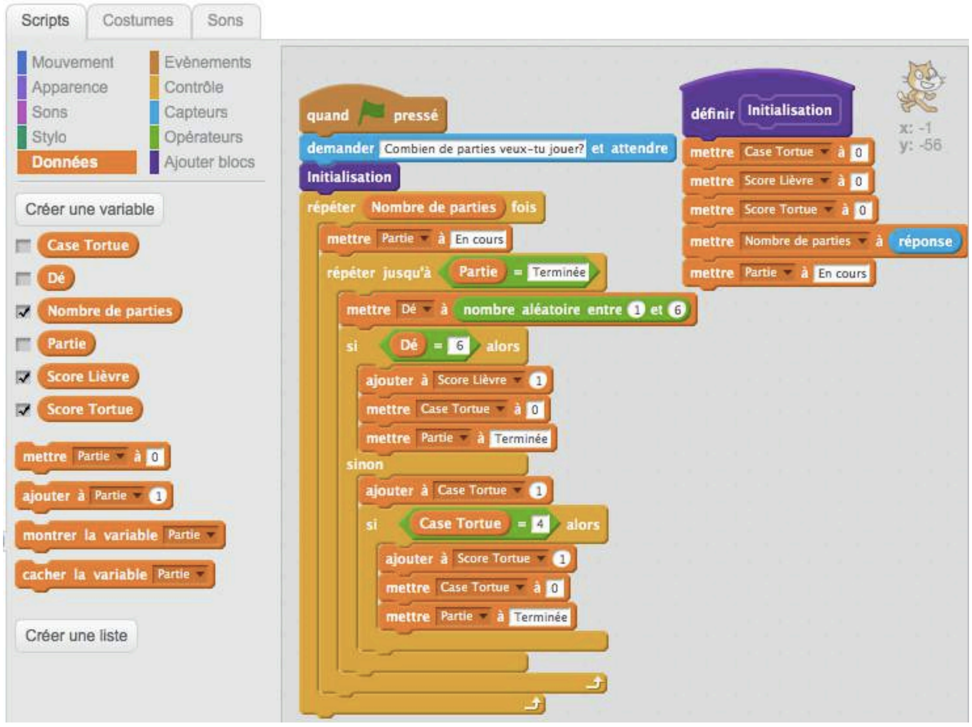
- Distribution de l'énoncé
- Phase de lecture individuelle.
- Consigne orale : « avec les dés jouer 5 parties, compter, noter des résultats au brouillon »

Plénière : Faire des lancers au tableau avec des cases et des aimants et un dé « mousse » pour la compréhension de tous.

Phase 2 : (5 min) Débat pour introduire l'approche fréquentiste selon ce que les groupes ont obtenu. Raison d'être de la simulation.

Phase 3 : (30 min) Mise en place de la **simulation en groupe**

- Classe mobile : Scratch
- Programme donné par l'enseignant en mode « utilisateur ». Charge aux élèves de compiler des données (victoires Lièvre, victoires Tortue) pour en déduire les fréquences ad-hoc.



Le document suivant est à remplir par l'élève :

À l'aide du fichier Scratch fourni, complète le tableau ci-dessous :

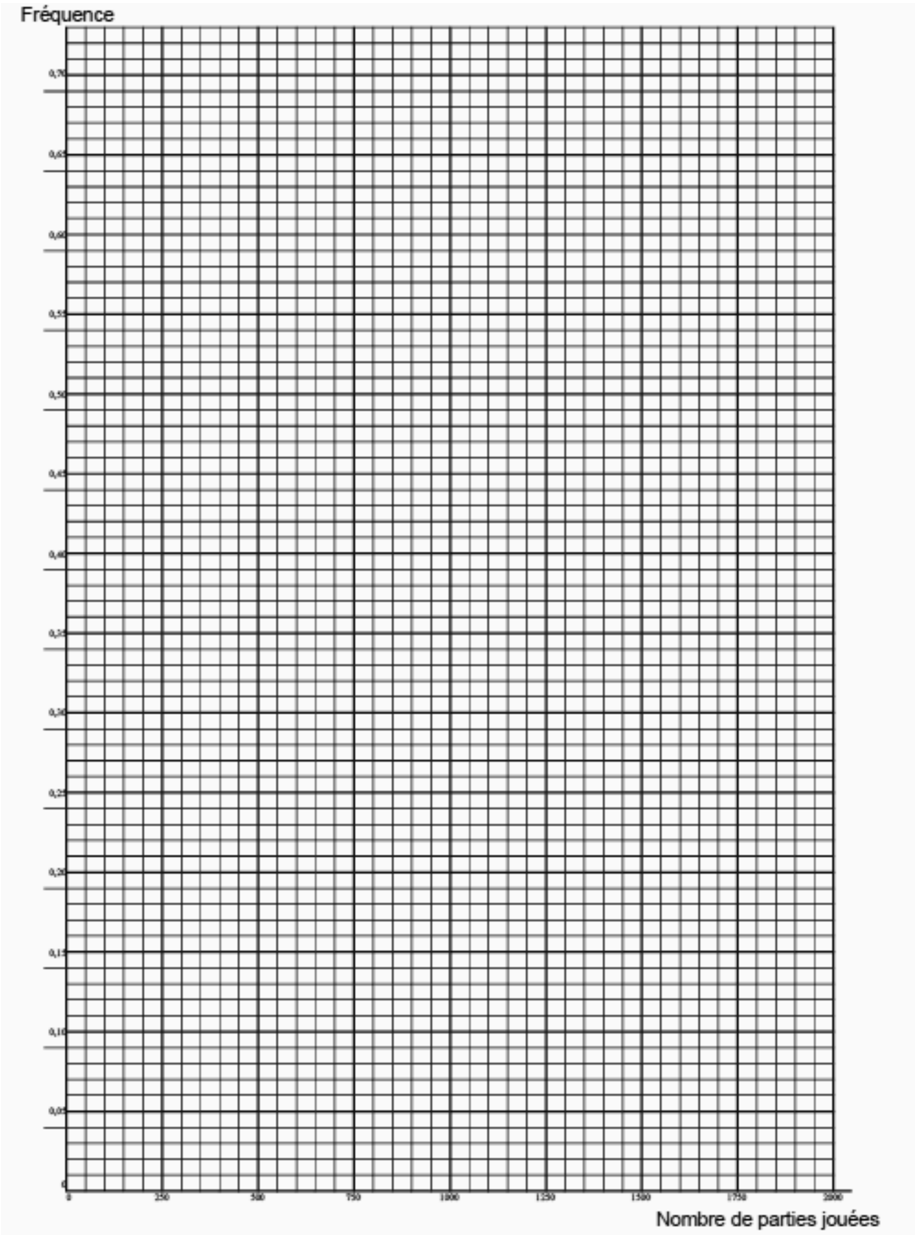
Nombre de parties jouées	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	150	200	250	300	350
Nombre de parties gagnées par la tortue															
Nombre de parties gagnées par le lièvre															
Fréquence de parties gagnées par la tortue															
Fréquence de parties gagnées par le lièvre															

Nombre de parties jouées	400	450	500	600	700	800	900	1 000	1 500	2 000
Nombre de parties gagnées par la tortue										
Nombre de parties gagnées par le lièvre										
Fréquence de parties gagnées par la tortue										
Fréquence de parties gagnées par le lièvre										

Qui a le plus de chance de gagner ? ....

Pourquoi ?

Il est attendu des groupes la réalisation d'un graphique et une phrase répondant au problème donné.



Pause : 10 min Scan des productions des groupes

Phase 4 : Institutionnalisation

- Montrer l'intérêt de la simulation
- Montrer que la fréquence se stabilisent à partir d'un « grand » nombre de lancers et qu'un échantillon trop « petit » ne permet pas de répondre.
- Fichier Scratch pour montrer la stabilisation de la fréquence

Analyse a posteriori du déroulement effectif

Pré-requis : Les élèves connaissaient déjà la notion de probabilité et l'approche fréquentiste. Les élèves étaient répartis en groupes hétérogènes de quatre et choisis par l'enseignant. Deux dés étaient disposés au centre de chaque îlot. La classe mobile était dans la salle avec le fichier Scratch installé préalablement par l'enseignant sur le réseau de l'établissement.

Phase 1 Durée : 15 min

L'énoncé est distribué aux élèves qui cherchent à répondre individuellement à la question. Rapidement les élèves ont utilisé les dés à leur disposition sur les tables (deux pour chaque groupe) pour réaliser des parties et discutent de leurs résultats. Il leur a été demandé de "faire cinq parties", soit cinq courses.

Des difficultés sont apparues :

Pourquoi y a -t-il deux dés ?

Quand une partie s'arrête-t-elle ? Confusion entre lancer et partie. Mauvaise compréhension du « sinon » ou mauvaise interprétation de la couleur "rouge" de la case d'arrivée, la case rouge pouvant être considérée comme "interdite".

L'enseignant doit se montrer vigilant sur le vocabulaire utilisé pour décrire le jeu (course ou partie ? lancer ou manche ?). Par exemple, dans le langage courant, une partie de tennis se fait en plusieurs manches, ce qui prête à confusion. Finalement, le collectif opte pour conserver uniquement course et lancer.

Phase 2 Durée : de 10 à 15 min

L'enseignant reprend ensuite la classe pour faire le bilan des résultats obtenus et trouver qui gagne. Une course avec un dé en mousse est réalisée avec la classe entière.

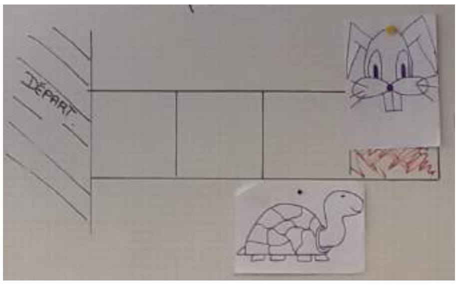


Photo du tableau de la classe

Certains élèves s'aperçoivent qu'ils n'avaient pas compris correctement la règle et la comprennent à ce moment-là. Il est préférable que quelques courses soient jouées et partagées pour dénouer le problème. Ce temps est essentiel pour s'assurer que les élèves ont compris la règle avant de poursuivre l'activité. L'enseignant doit ici déléguer les déplacements des vignettes des animaux afin de repérer si ce que produit l'effet du résultat du lancer est compris. La couleur "rouge" de la case d'arrivée peut aussi mener à des incompréhensions : dans un groupe d'élèves, elle a été interprétée comme une case " interdite" et non la case d'arrivée.

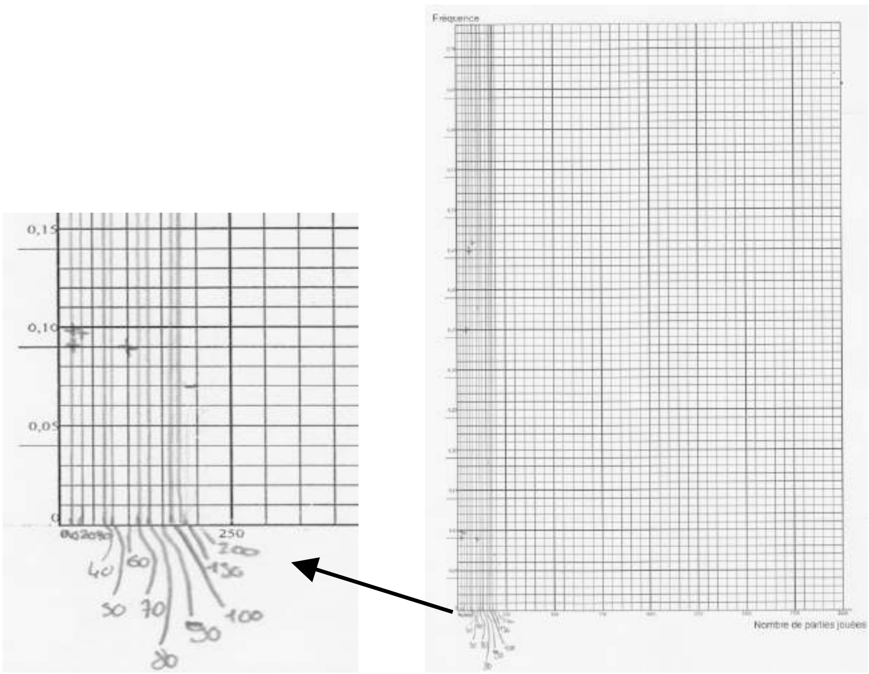
Chaque groupe ayant donné les résultats de leurs courses faites manuellement, ayant identifié qui a gagné. C'est ensuite pour estimer qui a le plus de chance de gagner qui vient l'idée qu'il faut plus de courses, les élèves se rendant compte qu'on ne peut pas conclure. Pour en faire un plus grand nombre, l'idée de faire une simulation émerge. L'enseignant explique aux élèves qu'ils devront remplir le tableau de recueils de données et tracer le graphique des fréquences correspondant. Il leur demande de prendre un ordinateur et leur dit qu'un programme Scratch, déjà construit, leur permet de faire les simulations (voir site Irem).

Phase 3 Durée : 30 min

Tous les élèves se sont mis au travail. Les deux premières lignes du tableau sont complétées facilement avec le programme Scratch.

Pour les calculs de fréquences, des difficultés apparaissent. Certains ne se souviennent plus de ce que c'est. D'autres élèves veulent exprimer ces fréquences en écriture décimale, mais ils n'ont pas de calculatrice. Des questions sur le format des nombres et des valeurs approchées se posent.

Pour le graphique, un premier problème d'échelle apparaît : les premières valeurs du tableau ne peuvent pas y apparaître. Certains élèves ont placé des graduations intermédiaires. Il est difficile pour eux de décider de ne pas placer certaines valeurs présentes dans le tableau et de décider de prendre des valeurs approchées .



Le deuxième problème qui apparaît est celui de placer les fréquences du lièvre et de la tortue sur la même feuille. Peu de groupes ont pu terminer dans le temps imparti la représentation attendue par l'enseignant. Il paraît nécessaire de prévoir un temps beaucoup plus long pour aboutir.

Lors de ce travail, le programme Scratch est donné comme une « *boite noire* » et n'est pas étudié. Il peut être intéressant de travailler sur ce programme plus tard ou d'en avoir travaillé un bien avant.

Phase 4 Durée : 30 min

Le bilan de l’activité est fait par les élèves à partir des questions de l’enseignant :
* retour sur la règle de la course et la question posée,
* retour sur le besoin de la simulation,
* définition de la fréquence et les différentes écritures,
* étude du graphique obtenu, utilisation d'un programme Scratch de l'enseignant[1] pour visualiser la stabilisation des fréquences.
* réponse à la question posée et lien entre fréquence et probabilité.

Deuxième lesson study

Déroulement envisagé

Voici l'énoncé choisi :

Le jeu du lièvre et de la tortue

Une course se passe entre un lièvre et une tortue : On dispose d’un parcours à 6 cases en ligne. On lance un dé équilibré à 6 faces. Si le 6 sort, alors le lièvre gagne, sinon la tortue avance d’une case. La tortue gagne quand elle arrive sur la 6ème case.

Sur qui pariez-vous ? Justifiez.

Le mot « *chance* » a été enlevé pour ne pas influencer le travail initial des élèves vers le domaine des probabilités. Il a été ajouté « si ... alors ... sinon » afin de clarifier la règle du jeu.
Prérequis : Notion de probabilité. Convergence de la fréquence vers la probabilité (Loi Faible des Grands Nombres). Avoir déjà fait des TICE (tableur et Scratch)

Situations déjà rencontrées par les élèves concernés par cette lesson study : somme de deux dés[2], jeu des quatre couleurs, triangles constructibles[3].

Objectif(s) de la séance :
- Modéliser la situation
- Travailler l’approche fréquentiste (loi faible des grands nombres) des probabilités.

Phase 1 : Appropriation/Expérimentation Durée : 15 minutes
Contenu : Le professeur distribue l’exercice aux élèves.
On distribue une feuille à chaque élève.
Configuration : Travail en groupe dès le début (en îlot), classe mobile (un ordinateur par groupe), six groupes de 3 élèves et un groupe de 4 élèves
Configuration des groupes : un élève moteur au moins par groupe.
Consigne(s) : Lecture en silence + réflexion sur le sujet (5min),
Attendu : Les différentes réponses possibles.

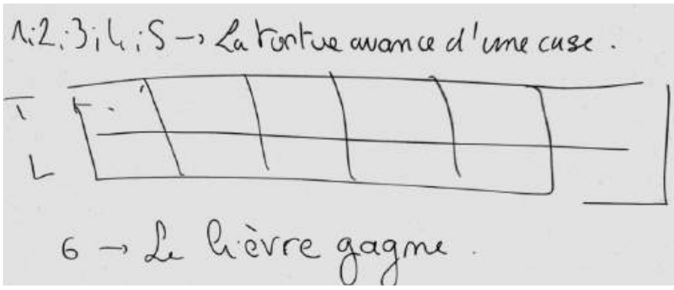
---

[1] Fichiers disponibles en suivant le lien http://irem.univ-rouen.fr/node/lessons/01
[2] Probabilités-statistiques Cinq scénarios ($3^{\text{ème}}/2^{\text{nde}}$), MASSELIN B. & MONDRAGON F., IREM de Rouen, pp78-88
[3] Une initiation aux probabilités par le jeu, MASSELIN B.& VIVIEN F, 2009, IREM de Rouen, pp 29-36

Phase 2 : Simulation TICE Durée : 60 minutes
Contenu : Les groupes proposent une simulation via un outil TICE. Les élèves qui iraient sur le logiciel Scratch : Algorithme à trou, algorithme avec des choses à adapter ... Penser à adapter l'algorithme pour avoir un échantillon d'un certain nombre de courses. Les élèves qui se dirigeraient vers le tableur : fichier vierge, à eux de tout créer
Consigne(s) : *Modéliser*[4] *la situation avec un outil TICE*

Phase 3 : Institutionnalisation
Contenu : Chaque groupe énonce la réponse qu'il a obtenue en expliquant succinctement sa méthode. On peut proposer, en solution, le fichier d'un des groupes.
Analyse a posteriori du déroulement effectif

Phase 1 : Le professeur a lu la consigne, a laissé les élèves libres de travailler et de s'approprier le jeu. (10 min de silence complet). Il a relancé en leur demandant de travailler en groupe et précisé que la communication était possible en chuchotant dans les groupes.
Il a essayé de s'assurer que le jeu était compris par tous en faisant un tableau présentant le jeu (cela a induit les élèves vers une démarche sur le tableur ou à un blocage sur la compréhension de la consigne).



Parcours dessiné par l'enseignant au tableau

Les élèves avaient le droit d'utiliser des dés. Mais aucun groupe n'a souhaité ou n'a sollicité l'usage des dés. Ceux-ci étaient présents dans un pot opaque sur le bureau de l'enseignant. Peut-être aurait-il fallu les mettre sur la table et les faire jouer ou montrer leur présence dans la classe, avec éventuellement l'enseignant faisant une course ?
L'enseignant avait dit au départ qu'il y avait la classe mobile et donc le droit de demander un ordinateur. Une fois qu'un ou deux groupes ont demandé un ordinateur, ensuite les autres ont suivi au fur et à mesure, parfois de leur plein gré, parfois incités par l'enseignant.

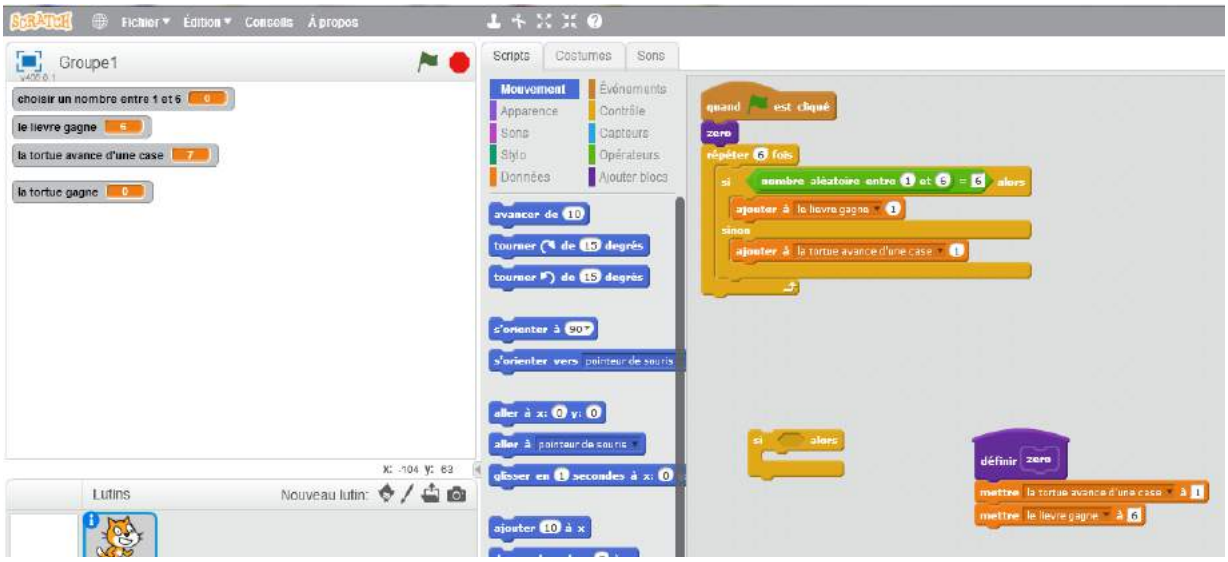
Phase 2 (programmation) :
Certains se sont lancés sur une simulation sur Scratch (deux groupes), d'autres sur le tableur (cinq groupes). Un groupe voulait calculer les probabilités avant tout. L'enseignant a alors imposé un ordinateur dans ce groupe.
Certains ne se sont pas appropriés la situation, ils ont voulu plaquer des connaissances de leur cahier de cours sans faire beaucoup de lien avec celles-ci.

Pause de 10 min

[4] Comprendre "simuler"

15 min de recherche supplémentaire ont été attribuées
Les élèves ont poursuivi leurs investigations et ont essayé d'améliorer leurs procédures, avec un peu de mal car le temps restant était relativement court.

Phase 3 (compilation des résultats) :
Regroupement et collecte des procédures, analyse par le professeur de fichiers Scratch et des procédures tableur par récolte des programmes sur clef USB.
Il est difficile pour l'enseignant de rentrer dans les différentes procédures Scratch, et pour lui, de comprendre un programme d'élèves. S'imprégner d'un programme qui n'est pas le sien demande du temps.



Il semble plus facile de rentrer dans la programmation sur le tableur. Effectivement, il est possible de visualiser le contenu des cases du tableur dans le menu *Outil*, *Option, LibreOffice.calc*, avec "*Afficher formule*". Toutes les formules apparaissent simultanément :

	A	B	C	D	E	F
1	Dé	FACES AU HASARD	Nombre	nb d'apparition	Premiere manche	
2	1	4	1	23	3	
3	2	3	2	13	2	
4	3	4	3	18	3	
5	4	4	4	11	5	
6	5	4	5	15	4	
7	6	1	6	18	1	
8		2				
9		6				
10		3				
11		3				
12		1				

D3 =NB.SI(B3:B103;C3)

	A	B	C	D	E	F
1	Dé	FACES AU HASARD	Nombre	nb d'apparition	Premiere manche	
2	1	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	1	=NB.SI(B2:B102;C2)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	
3	2	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	2	=NB.SI(B3:B103;C3)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	
4	3	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	3	=NB.SI(B4:B104;C4)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	
5	4	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	4	=NB.SI(B5:B105;C5)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	
6	5	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	5	=NB.SI(B6:B106;C6)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	
7	6	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	6	=NB.SI(B7:B107;C7)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	
8		=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)				
9		=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)				
10		=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)				
11		=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)				
12		=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)				
13		=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)				
14		=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)				

Pour actualiser la page des tirages aléatoires, il faut utiliser les touches Ctrl, Shift, F9

Dans certains groupes, très peu de traces de travail étaient rendues visibles. Des élèves sont restés bloqués sur l'énoncé, et en particulier sur ce qu'est une course. Ils n'avaient pas identifié la différence entre un lancer et une course.

Un groupe, sur tableur, a par exemple fait tout d'abord un premier lancer de dé 4999 fois. Puis l'enseignant les a fortement incités à "reproduire la colonne A cinq fois".

Intervient prof "Alors avez-vous réussi à modéliser une partie" ? → "Non".
P propose que la colonne A = 1er lancer donc reproduire la colonne A 6 x pour avoir les 6 lancers et "je vous laisse voir comment exploiter les résultats" → pb utilisation logiciel.
P demande combien de cases au chemin ? M répond spontanément "6".

Les élèves ont ainsi fait cinq lancers systématiques de dés pour une course (en colonnes B, C, D et E). Mais le traitement de ces lancers a posé problème. Si les règles du jeu semblaient comprises correctement dans le groupe, c'est la simulation tableur qui a posé problème.

groupe4_tableur.ods - OpenOffice.org Calc

	A	B	C	D	E	F
1	Lancé 1	Lancé 2	Lancé 3	Lancé 4	Lancé 5	
2	4	3	3	4		
3	5	1	6	6		
4	6	4	2	6		
5	3	1	6	6		
6	2	4	4	4		
7	4					
8	3					
9	3					
10	1					
11	1					
12	4					
13	6					
4998	3					
4999	4					
5000	5					

Et voici leur conclusion par rapport au problème :

Avec le tableur, on a simuler l'expérience aléatoire pour calculer les fréquences d'apparition de chaque issues.

Le lièvre a plus de chance de gagner.

Le rôle de l'enseignant sur le choix du logiciel : certains élèves ont fait des tentatives sur tableur et ensuite sur scratch pour la simulation, mais au final, cette dernière n'a pas abouti. L'enseignant ne doit-il pas plutôt imposer de ne pas changer de logiciel en cours de route ? D'autres groupes d'élèves ont fait les lancers de dés (100 fois un dé) mais n'ont pas réussi à les regrouper course par course.

4. Grille d'Interventions possibles de l'enseignant

Une conclusion un peu rapide a été repérée dans plusieurs classes, à savoir :

Le lièvre a une chance sur 6 de gagner, soit p(L)=1/6.

Il y a ici sans doute confusion entre l'événement "*Obtenir un six*" et "*Le lièvre gagne*" qui coïncident uniquement sur un parcours à une seule case.

Faire ce raisonnement, c'est oublier que, même s'il est vrai que le lièvre peut gagner au premier lancer, il a encore d'autres chances de gagner au second lancer puis au troisième.

En effet, imaginons que l'on fasse 36 courses. Un sixième de ces courses seront gagnées par le lièvre au premier lancer de dés, c'est-à-dire 6 courses. Et donc 30 de ces courses verront la tortue avancer d'une case. Sur ces 30 courses, 1 sixième, c'est-à-dire 5 courses verront le lièvre gagner et pour le reste la tortue avancer. Nous en sommes à 11 courses gagnées par le lièvre sur 36 et ce n'est pas fini, le lièvre a encore d'autres chances de gagner au troisième lancer puis au quatrième…

Ainsi, on obtient que $P(L) > 11/36$.

Or $1/6 = 6/36$ et $6/36 < 11/36$.

Cette démarche montre que la probabilité que le lièvre gagne n'est pas 1/6, car supérieure à 1/6. Elle permettrait aussi d'obtenir la probabilité que le lièvre gagne en poursuivant le raisonnement jusqu'au bout. En prenant (dans le cas de la victoire de la tortue en 4 coups) $6^4 = 1296$ courses au départ :

```
> restart;x:=6^4;
                                                  x := 1296
> L1:=x/6;
                                                  L1 := 216
> R1:=x-L1;
                                                  R1 := 1080
> L2:=R1/6;
                                                  L2 := 180
> R2:=R1-L2;
                                                  R2 := 900
> L3:=R2/6;
                                                  L3 := 150
> R3:=R2-L3;
                                                  R3 := 750
> L4:=R3/6;
                                                  L4 := 125
> P(L)=(L1+L2+L3+L4)/x;
```

$$P(L) = \frac{671}{1296}$$

Li représente le nombre de parties gagnées au i^ème lancer.
Ri représente le nombre de parties non gagnées par le lièvre au i^ème lancer.

Comme souvent en probabilités, le calcul de l'événement contraire est plus aisé. Mais cela demande alors à l'élève de changer de point de vue, et d'introduire comme intermédiaire l'événement " *La tortue avance d'une case*".

Voici une grille non exhaustive, d'interventions possibles de l'enseignant. Elle nous semble pouvoir aider l'enseignant face à certains observables autour du travail des élèves.

Cette grille contient une partie sur fond blanc, commune aux deux lessons. En revanche, la partie sur fond "*orange*" est relative à la première lesson study, celle sur fond "*bleue*" correspond à celle de la deuxième lesson study.

Phases	Déclencheur d'intervention	Interventions	Effets attendus, buts
1	L'élève pense que chacun joue à son tour	Qui lance le dé ? Qui commence la partie ? Le lièvre ou la tortue ?	Compréhension de la règle Manipulation professeur vient jouer dans un groupe en interne ou en plénière.
1	1/6 * 4 (ou nombre de cases du circuit)	1) Et s'il y avait 7 cases 2) Utilisation de la calculatrice	Compréhension de la règle
1	Chances du lièvre divisées par 4 (le nombre de cases) : 1/6*1/4=1/24. Idem pour la tortue : 5/6*1/4=5/ (suivant le nombre de cases).	Renvoyer vers la somme des probabilités égale 1	Problèmes calculatoires avec les probabilités
1	L'élève pense que la tortue avance malgré un 6	Revenir au sens du si ...sinon en revenant clairement sur le dé (partir dans l'exemple de la vie quotidienne).	Compréhension de la règle Manipulation professeur vient jouer dans un groupe en interne ou en plénière.
1	L'élève pense qu'il peut faire 5 ~~courses~~ lancers	Faire vivre le jeu	Compréhension de la règle Manipulation professeur vient jouer dans un groupe en interne ou en plénière.

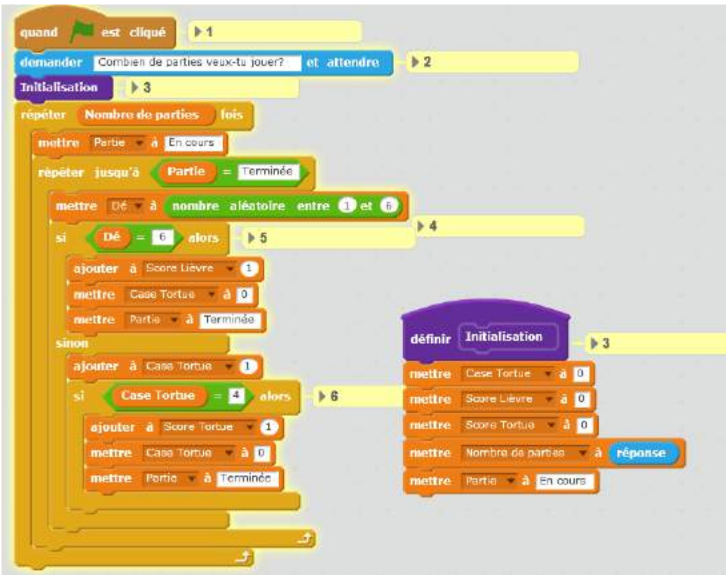
1	Réaction d'un élève : Faut-il faire des calculs ?	A toi de voir -> Laisser de l'autonomie à l'élève et le laisser dans un travail de recherches.	Laisser ouvert
1	Réponse intuitive sans réelle réflexion tel que 1/6 et 5/6	Diminuer le nombre de cases du parcours à une case, puis ajouter petit à petit une case de plus au parcours etc. Questionner sur la probabilité que le lièvre gagne si le parcours avait un nombre infini de cases intermédiaires.	Faire prendre conscience que la taille du parcours influe sur le résultat et invalider le fait que pour le parcours donné, les résultats soient 1/6 et 5/6.
2	Un élève assure que d'après ses résultats c'est clair que L (ou T) gagne après très peu de lancers.	1) Et si tu rejouais penses-tu avoir le même résultat ? 2) Questionner les autres, sonder, vers une discussion et un débat.	Confrontation, objectif : faire plus de lancers (et arriver à la nécessité de faire plus de lancers par le biais de simulations). Idée que l'élève rentre dans le scénario prévu (première Lesson Study) Qu'un petit nombre de lancers ne permet pas de conclure
2	Tous les élèves obtiennent le même résultat : Lièvre gagne (ou Tortue gagne)	Réduire l'échantillon : est-ce toujours le cas ? Les 3 premières parties. Rechercher à faire valider le résultat sans réduire l'échantillon	Observer une fluctuation chaotique- Observer et interpréter un résultat. Idée de faire « dépasser » la conjecture initiale, la valider ou invalider par tout le monde. LFGN « beaucoup », intervalle de fluctuation, idée de

		mathématiquement (ne pas entrer dans une réduction de 20 à 5).	conjecture renforcée.
3	Les élèves ne font rien à part appuyer sur le drapeau vert	Questionner sur le sens du programme. En référer au script préalablement imprimé avec repères et aides. Questionner sur des lignes ciblées du script *	Compréhension informatique du script et relier ce script à la règle du jeu.
3	Un élève détruit le programme	Lui donner une version papier du script	Remettre l'élève au travail
3	L'élève ne se rappelle plus la notion de fréquence.	1) Essayer de faire émerger le lien avec une fréquence du quotidien (fréquence cardiaque) 2) Donner la définition d'une fréquence	Problèmes calculatoires et/ou conceptuels.
3	L'élève ne mobilise pas la notion de fréquence.	1) Essayer de faire émerger la fréquence en récoltant au tableau des données sur des échantillons de taille différente 2) Questionner sur comment comparer ces échantillons	Faire réinvestir la connaissance ancienne de fréquence.
3	L'élève a des difficultés pour choisir le format de la fréquence	Discuter de ce que l'élève veut faire de ces fréquences (valeur	Faire prendre conscience que la visée guide le format des fréquences (si graphique, écriture décimale, si tableau seul, écriture fractionnaire

		exacte ou arrondie).	peut suffire).
3	L'élève ne voit pas l'intérêt de la construction du graphique… il interprète seulement les résultats du tableau.	A accepter par l'enseignant, relancer vers le calcul des probabilités	Concept : l'enseignant peut choisir de changer de registre de représentation des nombres (aller vers écriture décimale, abandonner les fractions)
3	L'élève n'arrive pas à placer les premiers points dans le graphique au vu de l'échelle et aux nombres de parties dans le tableau.	1) Questionner sur abscisse, ordonnée si nécessaire pour voir si confusion bloquante 2) Lui demander l'échelle de l'axe des abscisses (si elle est imposée par l'enseignant). 3) Ne pas placer les quatre premiers points-> échelle inadaptée.	Problèmes graphiques
3	L'élève place les points en les reliant.	Questionner sur pourquoi il les a reliés et ce qui l'autorise à le faire ou non. Par ex, pour 154 courses, a-t-on accès aux fréquences ?	Registre graphique mis en question avec un parallèle avec un affichage fait avec un logiciel comme Scratch ou Geogebra par exemple, montré par un enseignant.
3 bis Tableur	L'élève n'arrive pas à simuler « correctement » une course	1) Donner une feuille avec mise en forme imposée 2) Fiche technique	Problème de modélisation dans le tableur

		d'organisation spatiale ?	Problème d'organisation spatiale dans le tableur pour exploitation des données
3 bis	L'élève effectue 1000 lancers et compte le nombre de 6.	Reprendre la compréhension du jeu et donner feuille mise en forme	Identifier une course et éviter la confusion entre un lancer de dé et une course.
3 bis	L'élève ne sait plus les commandes informatiques ou syntaxe…	1) Prévoir en amont des coupons avec des formules utiles : = ALEA.ENTRE.BORNES() = NB.SI() = SI() = OU() 2) Progression commune TICE	En amont, préparer des fiches outillées sur les commandes… -> Nécessité de penser à une progression informatique spiralée.
3 bis	L'élève continue la course sans contrôler l'arrêt du jeu en faisant par exemple 7 lancers alors que le nombre de cases du parcours est de 6 (plus de lancers de dés que de cases).	Revenir sur la compréhension du jeu, par exemple, en lui redonnant la possibilité de faire une course à la main	

* Lignes possibles à questionner de l'algorithme de simulation



5. Le mot de l'équipe de formation-recherche

La question du "nombre de cases intermédiaires du parcours"

Tout comme la probabilité que le lièvre gagne pourrait être reconsidérée par un autre choix d'énoncé de règles du jeu, le nombre de cases du parcours influe sur les probabilités recherchées comme suit :

Nombre de cases intermédiaires	Valeur exacte de P(T)	Valeur approchée de P(T)	Valeur exacte de P(L)	Valeur approchée de P(L)
0	$\frac{5}{6}$	$\approx 0{,}833$	$\frac{1}{6}$	$\approx 0{,}167$
1	$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$	$\approx 0{,}694$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{11}{36}$ ou $1-\frac{25}{36}$	$\approx 0{,}306$
2	$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$	$\approx 0{,}579$	$1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$	$\approx 0{,}421$
3	$\frac{625}{1296}$	$\approx 0{,}482$	$\frac{671}{1296}$	$\approx 0{,}518$
4	$\frac{3125}{7776}$	$\approx 0{,}402$	$\frac{4651}{7776}$	$\approx 0{,}598$
5	$\frac{15625}{46656}$	$\approx 0{,}335$	$\frac{31031}{46656}$	$\approx 0{,}665$
n grand	$\lim_{n\to+\infty}(\frac{5}{6})^n = 0$		$\lim_{n\to+\infty}(1-(\frac{5}{6})^n)= 1$	

Probabilités en fonction du nombre de cases, Le lièvre et la tortue, 2017

La question des modèles

Cette dernière est importante à prendre en considération pour l'enseignant en ce qu'elle surgit dans la classe, en particulier si des choix sont faits de faire recours à de la simulation avec des logiciels numériques par exemple.

Dans la suite de notre analyse, notre étude porte sur le parcours suivant, même si elle est transposable à un parcours avec moins de cases.

Plateau de Jeu pour la suite de l'analyse, Le lièvre et la tortue, 2017

Le dé sera supposé ici équilibré (ce qui induit une loi uniforme discrète sur {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}) car les données recueillies ont toutes emprunté cette première hypothèse.
Deux modèles probabilistes peuvent être choisis :
- le modèle probabiliste 1 : Espace probabilisé avec la loi géométrique tronquée
- le modèle probabiliste 2 : Espace probabilisé avec la loi binomiale
L'annexe 2 (p.27-28) propose une analyse de la situation relative à chacun de ces modèles.

Des apports didactiques autour de la modélisation et de la simulation

Un lancer de dé : est-ce une expérience réelle ou une expérience aléatoire ? Si je lance mon dé rouge préféré à cet instant précis, le résultat de ce dé à cet instant n'est pas une expérience aléatoire… c'est une expérience réelle et déterministe. Les lois de la physique pourraient prédire le résultat mais beaucoup (trop) de paramètres sont en jeu : les conditions initiales, les frottements de l'air… Cependant si l'on veut étudier le lancer d'un dé, de façon générale (et de façon plus abstraite), on peut considérer ceci comme une expérience aléatoire.
En probabilités (dans un monde mathématique et théorique), une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat n'est pas connu d'avance et peut varier si l'on répète cette expérience « dans les mêmes conditions ». Le résultat de l'expérience dépend du « hasard » (pour autant il n'est pas si aisé de définir le hasard). Comme le précise Henry (2001), il serait plus commode de parler d'expérience à résultat aléatoire car en effet ce n'est pas l'expérience qui est aléatoire mais le résultat de cette expérience. Bien au contraire, l'expérience doit elle être réalisée selon un protocole très rigoureux.

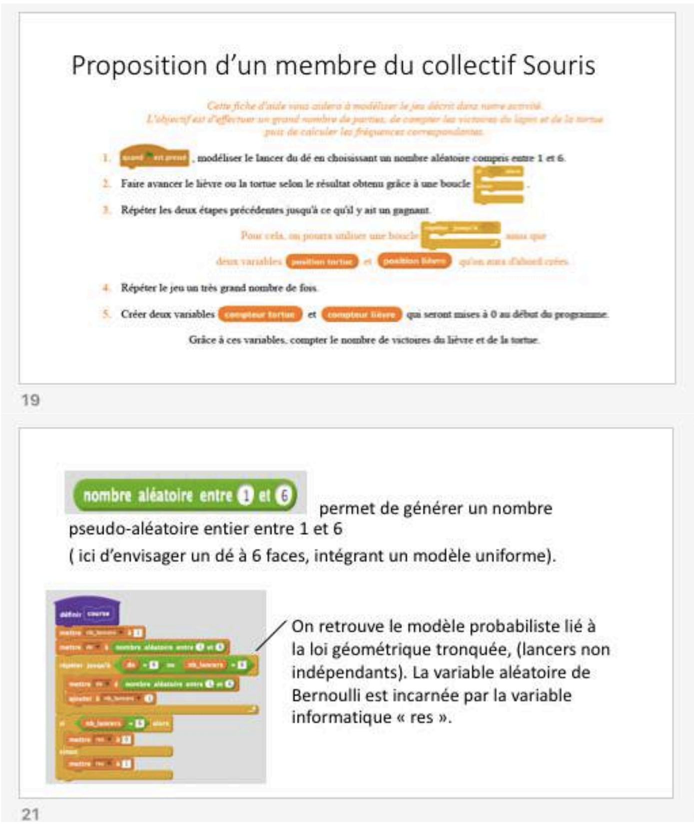
Un modèle est une simplification de la réalité. Choisir un modèle c'est considérer certains paramètres de la situation, mais aussi en négliger d'autres. Quand les modèles déterministes ne permettent pas de prévoir précisément du fait de négliger trop de paramètres, il est possible d'utiliser un modèle probabiliste. On en déduit par le calcul des probabilités le degré de certitude que l'on peut avoir dans la réalisation des différents résultats possibles (Girard, 2003).

Selon Parzysz (2009), la simulation « *consiste à remplacer une expérience aléatoire qu'on se propose d'étudier par une autre expérience, plus facile et/ou plus rapide à mettre en œuvre, mais qu'il faut pour cela s'assurer que cette simulation reflète statistiquement l'expérience initiale, l'adéquation entre les deux étant en quelque sorte assurée par la qualité du modèle probabiliste déterminant la simulation* ». Il faut bien avoir conscience que de lancer soi-même un dé n'est pas la même chose que faire une simulation d'un lancer de dé sur tableur. Dans le premier cas, il s'agit d'une expérience réelle dans le monde réel, dans le second cas, il s'agit d'une expérience théorique où un modèle a déjà été choisi au préalable (simulation d'une réalisation d'une loi uniforme discrète sur {1 ; … ;6}). Girard (2003) cite : « *La simulation est la méthode statistique permettant la reconstitution fictive de l'évolution d'un phénomène. C'est une expérimentation qui suppose la construction d'un modèle théorique* *présentant une similitude de propriétés ou de relations avec le phénomène faisant l'objet de l'étude* » (Dodge, 1993). Pour conclure, faire de la simulation c'est déjà être dans le monde mathématique, car un modèle a déjà été choisi.

Le diaporama proposé lors de la synthèse des lesson study complète l'étude précédente en traitant des articulations expérience aléatoire- modélisation et modélisation-simulation. Il est disponible en intégralité sur le site de l'IREM[5].

Ce dernier revient sur les deux lois en lien avec la situation du lièvre et de la tortue : elles sont décrites et rapprochées du tableur et du logiciel Scratch du point de vue de la simulation, la loi binomiale semblant faciliter la simulation tableur mais posant problème aux élèves à cause de "lancers pour rien".

Les liens entre modèle et simulation y sont illustrés par des productions émergeant de groupes d'élèves lors de ces lesson study. Y sont aussi présentées des propositions d'enseignement autour de la situation et des pistes de réflexion autour de simulation avec le logiciel Scratch.



Extrait du diaporama 2017

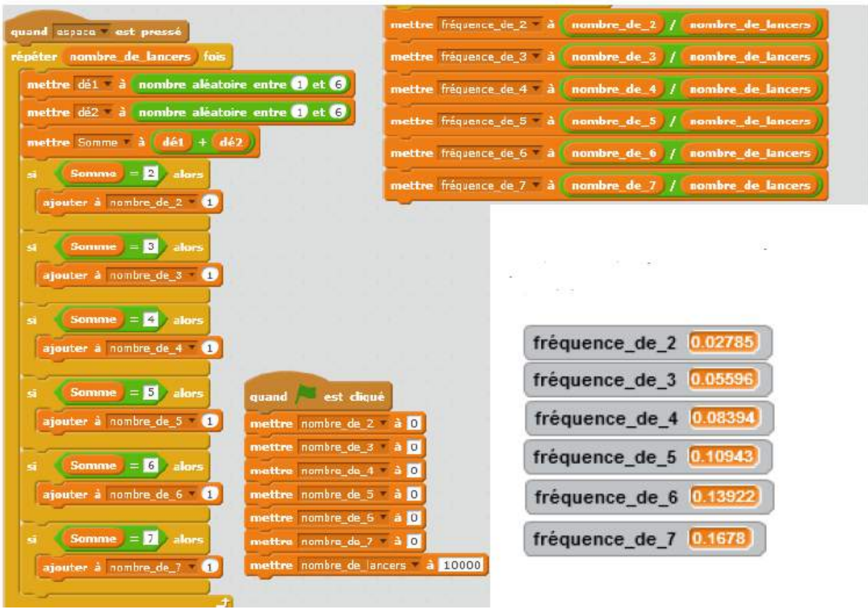
Réflexion autour de l'utilisation du logiciel Scratch

En ce qui concerne un choix de faire réaliser un algorithme dans la même optique que la lesson study des Souris, nous ajoutons comme prérequis suivants :

---

[5] http://irem.univ-rouen.fr/node/lessons/01

- Avoir déjà fait un programme avec des calculs de fréquences, par exemple la fréquences d'une face particulière lors du lancers d'un dé ou fréquence d'une somme particulière lors du lancer de deux dés...
- Cela inclut la connaissance, en algorithmique, de la notion de boucle, de variable informatique, d'instructions conditionnelles et pourquoi pas de blocs pour la clarté et la lisibilité des programmes.



Exemple de Script sur la somme de deux dés

Pour le choix des variables

Faut-il partir d'une feuille blanche ?

Faut-il imposer ou pas des variables afin de faciliter la mise en commun ensuite ?

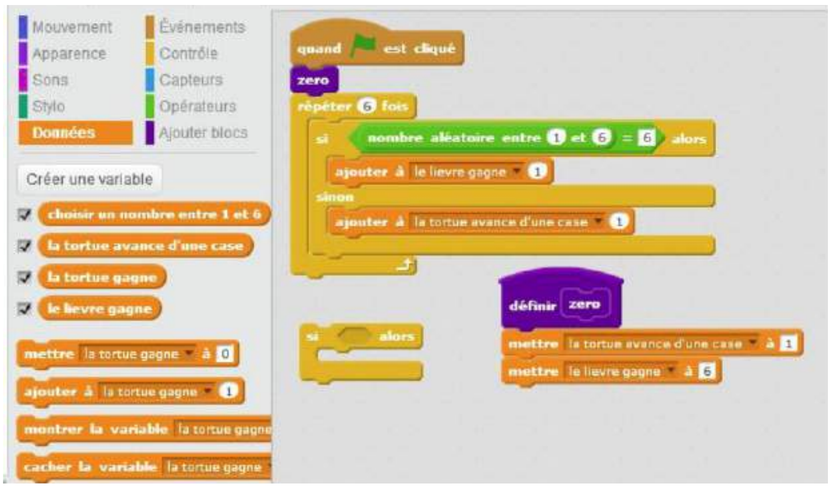
Faut-il imposer des boucles ? Limiter les outils ?

Les boucles

Il peut y avoir une boucle dans une boucle (répéter 1000 fois une partie qui est elle-même une boucle). L'introduction d'un bloc "*course*" faciliterait-elle la compréhension ?

Une production possible d'un élève est présentée en Annexe 3 (p29).

Voici ce qu'un élève est susceptible de produire (le lièvre gagne en six lancers).



Le bloc "*définir zéro*" doit être compris comme un bloc d'initialisation. On retrouve un modèle lié à la loi binomiale. La façon de nommer les variables rend aussi la lecture du programme difficile. Il faut remarquer ici qu'il est au moins aussi difficile (voir beaucoup plus) de rentrer dans le programme d'un élève en classe d'informatique que de rentrer dans une stratégie élève en classe de mathématiques. En modifiant un peu ce programme, nous obtenons un programme qui simule une partie.

6. Conclusion

En conclusion, l'exemple ci-dessus vient illustrer toute la problématique soulevée par les deux lesson study autour de cette situation où l'enseignant est amené à faire des choix, à trouver un équilibre entre un travail autour des probabilités et autour de l'algorithmique, voire d'articuler différents temps décalés autour de cette situation.
De plus, certains registres sémiotiques non évoqués auparavant ont surgi dans les classes et peuvent pour autant permettre un accès à la preuve par des calculs de probabilités. Reste à l'enseignant à encourager certaines procédures afin qu'une pluralité s'exprime et puisse enrichir la phase d'institutionnalisation autour de cette situation. En effet, comme en témoignent les travaux d'élèves en Annexe 2, il n'a pas été rare d'observer des arbres ou autres représentations pendant les lesson study. Ces écrits questionnent le rôle de l'enseignant et les interventions possibles au regard de la dévolution souhaitée.
Quelques soient vos impressions à la lecture de ces éléments, nous espérons que ce cahier vous permettra de vous lancer sur cette situation éclairée conjointement par des expériences de classes et des apports de la recherche en didactique.

Remerciements

L'équipe de formation-recherche tient à remercier non seulement les acteurs de terrain investis dans cette lesson study (élèves et enseignants impliqués dans la formation), mais aussi les acteurs de l'ombre sans qui ce type de formation n'aurait pas vu le jour, à savoir, particulièrement Nicolas Gendreau de l'Inspection Régionale de Mathématiques de l'Académie de Rouen, ainsi que l'équipe de direction administrative du collège Montaigne du Vaudreuil représenté par Philippe Galimand. Nous tenons à remercier les membres du LDAR impliqués de près ou de loin dans cette formation d'un nouveau genre, et tout particulièrement Charlotte Derouet pour son appui scientifique.

Bibliographie

GIRARD J.C., La liaison statistiques- probabilités dans l'enseignement, 2004, REPERES-IREM N°57, pp.83-91

HENRY M., Autour de la modélisation en probabilités, 2001, Commission Inter-IREM, pufc

MASSELIN B.& MONDRAGON F., *Probabilités-statistiques Cinq scénarios (3ème/2nde)*, 2015, IREM de Rouen, pp78-88

PARZYSZ B., Des expériences au modèle, via la simulation, 2009, REPERES-IREM, N°74, pp.91-103

PARZYSZ B., Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : une étude de cas, 2014. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *17*(4 (I)), 65–82.

Annexes

Annexe 1 Compléments autour des modèles mathématiques

Modèle probabiliste 1 : Espace probabilisé avec la loi géométrique tronquée

Pour toute la suite, nous noterons Si l'évènement « le 6 sort au $i^{ème}$ lancer » pour i nombre entier allant de 1 à 6 (étant donné le nombre total de cases mentionné à six). Excepté pour S_1, l'existence des événements S_2, S_3, S_4, S_5 et S_6 dépend des résultats des lancers obtenus. Autrement dit, pour tout k dans |]1; 6[|, Sk ne pourra être réalisé que si pour tout i < k, Si n'est pas réalisé.

L'expérience aléatoire consiste ici à répéter dans des conditions identiques une épreuve de Bernoulli de paramètre (probabilité d'obtenir un 6 au $i^{ème}$ lancer) avec un maximum de six répétitions. Dans ce modèle, l'arrêt du jeu sera provoqué au premier succès car le lièvre a gagné dans ce cas. Nous considérons une course comme étant une partie du jeu qui s'arrête dès que l'un des deux animaux a gagné.

X est la variable aléatoire représentant le nombre de lancers de dés effectué lors d'une course. X prend ses valeurs dans l'ensemble |]1; 6[|. Elle suit la loi géométrique tronquée de paramètre $\mathrm{p} = \frac{1}{6}$ et $n = 6, n$ étant le nombre maximum de répétitions de l'expérience aléatoire élémentaire.

La probabilité de X est décrite par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^6$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^4 \times \frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^5 \times \frac{1}{6}$

Ce qui donne ainsi :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{15625}{46656}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{125}{1296}$	$\frac{625}{7776}$	$\frac{3125}{46656}$

Et :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i) \approx$	0.335	0.167	0.139	0.116	0.096	0.080	0.070

Effectuer six lancers dans ce modèle correspond à deux possibilités :

- ou bien aucun 6 n'est sorti sur les six lancers (et dans ce cas la tortue gagne)
- ou bien aucun 6 n'est apparu sur les cinq premiers lancers et il y a eu un six au sixième lancer.

Donc $P(X = 0) = P(T)$ où l'événement *T* est défini par « *la tortue gagne* ».

Et $P(T) = P(S1 \cap S2 \cap S3 \cap S4 \cap S5 \cap S6)$.

Nous avons donc : $P(T) = (\frac{5}{6})^6$

En effet, cette égalité est une conséquence de la formule des probabilités composées :

$P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2) = P(\overline{S}_1) \times P_{\overline{S}_1}(\overline{S}_2)$

On obtient six au deuxième lancer sachant qu'au premier lancer il n'y a pas eu de six, donc :

$P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$

$P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap \overline{S}_3) = P(\overline{S}_1) \times P_{\overline{S}_1}(\overline{S}_2) \times P_{\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2}(\overline{S}_3) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$

Et ainsi de suite, donc

$P(T) = (\frac{5}{6})^6 = \frac{15625}{46656} \approx 0,335$

Cette résolution peut prendre appui sur un arbre pondéré. Elle implique dans ce cas la connaissance de règles et des changements de registre sémiotique (Diapositive D10 du diaporama ci-après)
L'usage de ce modèle probabiliste tel qu'il a été présenté, n'est pas à la portée des élèves de classe de 3ème ou de 2nde car les notions de loi géométrique tronquée, de variable aléatoire, et d'arbre pondéré ne font pas partie des connaissances exigibles à ces niveaux.

Modèle probabiliste 2 : Espace probabilisé avec la loi binomiale
Nous allons décrire ci-après cet autre modèle, qui peut apparaître cependant lors de la mise en place de simulations en 3ème et 2nde. Ce modèle n'est pas inclus dans le B.O. de référence des probabilités à ces niveaux, il est introduit dans les documents officiels en classe de terminale S ou ES. Nous reprendrons les notations précédentes. Il est envisageable de considérer l'univers comme l'espace produit $|]1\ ;6[|^6$ constitué des 6-uplets.
L'expérience aléatoire consiste à répéter autant de fois que de cases du jeu six lancers de dés successivement, et de ne pas tenir compte du fait qu'un six soit apparu à l'étape précédente. Ainsi, même si le lièvre a potentiellement gagné, les lancers de dé se poursuivent. Ce changement de point de vue par rapport au modèle précédent facilite la simulation numérique.
Ici intervient une épreuve de Bernoulli qui est la suivante : on lance six fois un dé.
Cette expérience est répétée de façon identique et indépendante 6 fois de suite. Le succès S est l'événement "*Obtenir un six*" et sa probabilité p vaut $\frac{1}{6}$.
Soit Y la variable aléatoire de Bernoulli qui compte le nombre de six obtenus en lançant six fois le dé, i.e. le nombre de six dans les 6-uplets. Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{1}{6}$.
$P(L) = P(Y \geq 1)$ si L désigne «*Le lièvre gagne*» et $P(T) = P(Y = 0)$ si T est l'événement «*La tortue gagne*».
L'arbre pondéré est présenté en Diapo 14.

Annexe 2 Brouillons d'élèves produits lors de la Lesson Study Souris