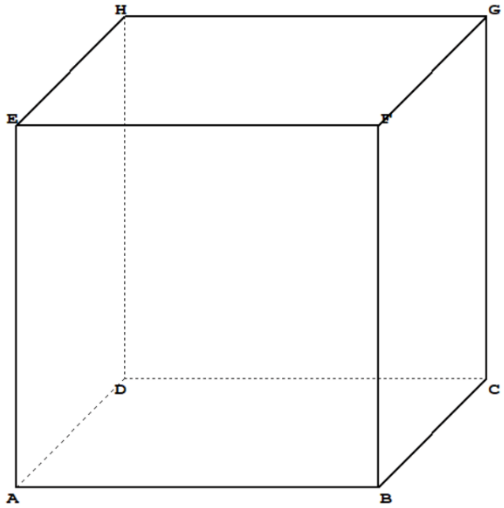
LES OBJETS DE L'ESPACE EN MATHEMATIQUES

En mathématiques, l'objet géométrique élémentaire est le point que ce soit dans le plan comme dans l'espace.
A partir de points, on peut composer des ensembles de points : par exemple des ensembles de points alignés comme la droite, le segment, la demi-droite.
Par deux points de l'espace (nommons-les A et B), il ne passe qu'une seule droite que l'on nomme (AB) comme dans le plan.
Dans l'espace, un nouvel objet apparait immédiatement : **le plan**.
Les points qui constituent un plan ne sont pas nécessairement alignés ; ils sont **coplanaires**. Ainsi par trois points de l'espace qui ne sont pas alignés (nommons-les A, B et C par exemple), passe un unique plan que l'on va nommer (ABC).

Ainsi dans le cube ABCDEFGH représenté ci-contre, le plan (ABC) contient la face ABCD du cube ; cette face est incluse dans le plan (ABC). Mais ce plan va bien au-delà de cette face… Il faut parvenir à imaginer le prolongement à l'infini de cette face de manière rectiligne pour envisager se représenter le plan (ABC) à la manière d'une fine vitre en verre plane sans épaisseur qui s'appuierait sur cette face du cube.



Tout point situé sur la droite (AB) appartient aussi à ce plan : ainsi si deux points appartiennent à un plan, alors la droite toute entière est incluse dans ce plan.

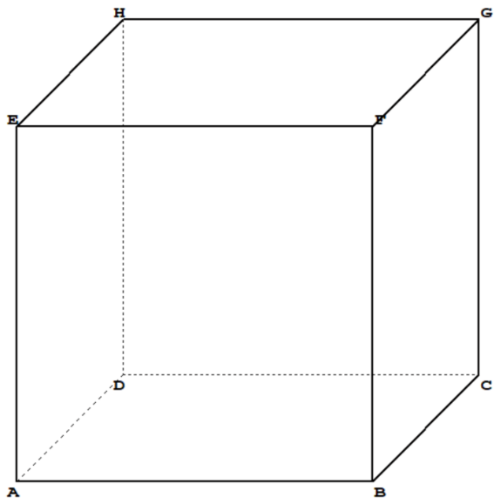
Regardez la vidéo Cube2.mp4.

Les droites (AB), (AC), (AD), (DC), (BD), (BC) sont incluses dans le même plan (ABC).
Ce plan contient une infinité de droites qui sont donc toutes coplanaires (elles sont alors soit sécantes, soit parallèles).
Il suffit donc de deux droites distinctes, sécantes ou parallèles, pour définir ce plan (ABC).
Cependant deux droites distinctes de l'espace ne définissent pas forcément un plan : dans ce cas, elles sont qualifiées de **droites non coplanaires**.

Regardez la vidéo Cube3.mp4 pour remarquer visuellement les éléments qui viennent d'être mentionnés.

Dans ce cube, on considère le point M, milieu de [AE] et on s'intéresse à la droite (MF).

Le plan (ABC) est-il sécant avec la droite (MF) ? Si oui, déterminer son intersection.



Regardez pour corriger la vidéo Cube4.mp4.

Cet exemple simple illustre la nécessité d'utiliser certaines propriétés géométriques de l'espace pour trouver des réponses à des questions.
On va donc s'intéresser à ce que l'on nomme la position relative des objets de l'espace, les uns par rapport aux autres : les droites entre elles, les plans entre eux, les droites et les plans. Vont venir s'ajouter des propriétés sur le parallélisme et sur l'orthogonalité des objets étudiés.

POSITIONS RELATIVES DANS L'ESPACE

1. Règles d'incidence

- Un plan est défini par trois points de l'espace non alignés. Cela a pour conséquence qu'un plan peut aussi être défini par deux droites sécantes ou par deux droites parallèles (on y trouve au moins trois points non alignés appartenant à ces droites)
- Si deux points distincts sont dans un même plan donné, alors la droite définie par ces deux points appartient aussi à ce plan. Ainsi un plan peut aussi être défini par une droite et un point distinct de cette droite.
- Dans un plan de l'espace, toutes les propriétés et tous les théorèmes de géométrie plane peuvent s'appliquer (théorèmes de Pythagore, de Thalès, trigonométrie, …).
- Deux plans de l'espace sont soit confondus, soit sécants en une droite, soit strictement parallèles.
- Deux droites de l'espace sont soit confondues, soit sécantes en un point (elles sont donc coplanaires), soit strictement parallèles (elles sont donc coplanaires), soit non coplanaires.
- Par rapport à un plan donné, une droite de l'espace est soit incluse dans ce plan, soit sécante avec ce plan en un point, soit strictement parallèle à ce plan.

2. Parallélisme dans l'espace

- Par tout point de l'espace, il passe une seule droite parallèle à une droite donnée et il passe un seul plan parallèle à un plan donné.
- Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles. Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan sécant à l'une des droites est sécant à l'autre.
- Si deux plans sont parallèles, alors tout plan sécant à l'un des plans est sécant à l'autre et leurs intersections sont ***deux droites parallèles***.
- Si deux plans sécants contiennent chacun une droite telle qu'elles sont parallèles entre elles, alors la droite intersection des deux plans est parallèle à ces deux droites (théorème du « toit »).

  Démonstration : *Soit P et P' deux plans sécants suivant la droite D qui contiennent chacun une droite d et une droite d' parallèles. On note Q le plan défini par ces deux droites parallèles. Donc* $P \cap Q = d$ *et* $P' \cap Q = d'$.
  Si D et d sont sécantes en A alors A appartient à Q et à P' ; donc A appartient à d'. Ainsi d et d' sont sécantes en A ce qui est absurde. Donc D et d sont parallèles tout comme D et d'.

- Une droite est parallèle à un plan ssi il existe une droite de ce plan qui est parallèle à cette droite.

3. Orthogonalité dans l'espace

- Deux droites de l'espace sont perpendiculaires lorsqu'elles sont coplanaires et perpendiculaires dans ce même plan. Elles sont orthogonales lorsque leurs parallèles respectives passant par un même point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.
- Une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan : il suffit que la droite soit orthogonale à deux droites sécantes du plan pour que la droite soit perpendiculaire au plan.
- Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles. Si deux plans sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'un des plans est perpendiculaire à l'autre.
  Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles. Si deux droites sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.