

SITUATIONS ET ...

1. Voici trois situations mettant en jeu deux grandeurs dépendantes l'une de l'autre :

Mécanique :

Un coureur à pied se déplace à la vitesse de 3 m/s. Il parcourt ainsi une distance d qui dépend du temps t .

- a) Calculez d lorsque t vaut 4 s, lorsque t vaut 1 min, lorsque t vaut $\frac{1}{4}$ d'une heure.
- b) Calculez t lorsque d vaut 15 m.
- c) Exprimez d en fonction de t .

Géométrie 1:

On considère un triangle équilatéral de côté a et on veut calculer son périmètre P .

- a) Calculez P lorsque a vaut 4 cm, lorsque a vaut 1 dm, lorsque a vaut $\frac{1}{4}$ de mètre.
- b) Calculez a lorsque P vaut 15 m.
- c) Exprimez P en fonction de a .

Economie :

Un DVD vierge coûte 3 € dans un magasin de la ville. On veut calculer le prix P lorsque qu'un client achète n DVD.

- a) Calculez P lorsque n vaut 4 DVD, lorsque n vaut 10 DVD, lorsque n vaut 25 DVD.
- b) Calculez n lorsque P vaut 15 €.
- c) Exprimez P en fonction de n .

-
2. On note x , la mesure de la variable libre dans l'unité proposée et y , la mesure de la variable dépendante dans l'unité proposée pour chacune des quatre situations.

Par exemple, dans la situation de mécanique, t peut être égal à x heures ou bien x minutes ou tout autre choix pour l'unité.

Etablissez dans chaque situation, en utilisant la relation entre les grandeurs précédente, une relation entre les mesures. Que constatez-vous ?

3. Représentez graphiquement les relations entre les grandeurs, précédemment déterminées.
-

4. Nouvelle situation :

a) Géométrie 2 :

On considère un rectangle de côtés 3 cm et a . On veut calculer son aire A . Exprimez A en fonction de a puis exprimez la mesure de A en fonction de la mesure de a .

- b) Sans faire aucun calcul et en vous aidant de la courbe de la fonction $f : x \mapsto 3x$ sur \mathbb{R}^+ , donnez et justifiez des propriétés de A .

5. Dernière situation :

a) Géométrie 3 :

On considère un rectangle de côtés 3 cm et a pour lequel la grandeur a varie entre 2 cm et 7 cm. On veut calculer son aire A . Exprimez A en fonction de a puis exprimez la mesure de A en fonction de la mesure de a .

b) Quel modèle fonctionnel allez-vous étudier pour donner et justifier des propriétés de A ?

5. Dernière situation :

a) Géométrie 3 :

On considère un rectangle de côtés 3 cm et a pour lequel la grandeur a varie entre 2 cm et 7 cm. On veut calculer son aire A . Exprimez A en fonction de a puis exprimez la mesure de A en fonction de la mesure de a .

b) Quel modèle fonctionnel allez-vous étudier pour donner et justifier des propriétés de A ?

5. Dernière situation :

a) Géométrie 3 :

On considère un rectangle de côtés 3 cm et a pour lequel la grandeur a varie entre 2 cm et 7 cm. On veut calculer son aire A . Exprimez A en fonction de a puis exprimez la mesure de A en fonction de la mesure de a .

b) Quel modèle fonctionnel allez-vous étudier pour donner et justifier des propriétés de A ?

5. Dernière situation :

a) Géométrie 3 :

On considère un rectangle de côtés 3 cm et a pour lequel la grandeur a varie entre 2 cm et 7 cm. On veut calculer son aire A . Exprimez A en fonction de a puis exprimez la mesure de A en fonction de la mesure de a .

b) Quel modèle fonctionnel allez-vous étudier pour donner et justifier des propriétés de A ?

Objectifs :

- Montrer que plusieurs situations peuvent conduire à une même fonction.
- Montrer que pour une situation, on peut obtenir différentes relations numériques ; induire que l'idée serait d'avoir tous la même relation en imposant des unités aux mesures des grandeurs.
- Comparer représentations graphiques de relations entre des grandeurs et représentation graphique d'une fonction.
- Recontextualiser une fonction dans une autre situation.

Analyse a priori :

1. Mécanique : $d = 3\text{m/s} \times t$
Géométrie 1 : $P = 3a$
Economie : $P = 3\text{€}/\text{DVD} \times n$

On peut s'attendre des difficultés autour des unités et des grandeurs quotients (3€/DVD). Dans la seconde situation, le nombre 3 est pur : ce n'est pas une grandeur...

2. Mécanique : $d = 3\text{m/s} \times t$. $d = y \text{ m}$ et $t = x \text{ s}$: $y \text{ m} = 3\text{m/s} \times x \text{ s} = 3x \text{ m}$. Donc $y = 3x$.
Les élèves devraient choisir comme unités le mètre et la seconde...

Géométrie 1 : $P = 3a$. $P = y \text{ cm}$ et $a = x \text{ cm}$: $y \text{ cm} = 3 \times x \text{ cm} = 3x \text{ cm}$. Donc $y = 3x$.
Les élèves devraient choisir la même unité pour P et a ...

Economie : $P = 3\text{€}/\text{DVD} \times n$. $P = y \text{ €}$ et $n = x \text{ DVD}$: $y \text{ €} = 3\text{€}/\text{DVD} \times x \text{ DVD} = 3x \text{ €}$. Donc $y = 3x$.
La difficulté va être d'identifier l'unité de n comme étant « un nombre de »...

Géométrie 2 : $A = 3\text{cm} \times a$. $A = y \text{ cm}^2$ et $a = x \text{ cm}$: $y \text{ cm}^2 = 3\text{cm} \times x \text{ cm} = 3x \text{ cm}^2$. Donc $y = 3x$.
Les élèves vont sûrement choisir le cm^2 et donc le cm . Il pourrait être intéressant de montrer le cas où l'on choisirait par exemple le dm et le dm^2 ...

Le choix de l'unité de la variable libre mais aussi celui pour la variable dépendant assure l'unicité de la relation numérique.

En synthèse, on fait dégager que ces 4 situations conduisent à deux fonctions : $x \mapsto 3x$ sur \mathbb{R}^+ et $x \mapsto 3x$ sur \mathbb{N} . Les deux situations non économiques conduisent à une seule fonction qui modélise les mesures des grandeurs en relation : c'est ce modèle que les mathématiciens étudient pour déterminer ses propriétés. On en déduit alors des propriétés analogues des phénomènes étudiés dans les situations (signe, variations, extremums...).

3. On va distinguer les graphes de grandeurs avec des unités sur les axes et le graphe de la fonction qui se place dans le domaine numérique sans unité... 3 graphes dans les grandeurs pour un seul graphe de fonction...
4. a) Géométrie 2 : $A = 3\text{cm} \times a$. $A = y \text{ cm}^2$ et $a = x \text{ cm}$: $y \text{ cm}^2 = 3\text{cm} \times x \text{ cm} = 3x \text{ cm}^2$. Donc $y = 3x$.
Les élèves vont sûrement choisir le cm^2 et donc le cm . Il pourrait être intéressant de montrer le cas où l'on choisirait par exemple le dm et le dm^2 ... 3 cm n'est pas une grandeur quotient, c'est A qui est une grandeur produit.

b) A est croissante quand a augmente car la fonction $f : x \mapsto 3x$ est croissante sur \mathbb{R}^+ . Un rectangle de 3 cm sur 4 cm a une aire de 12 cm^2 car $3 \times 4 = 12$ (l'image de 4 par f est 12). Un tel rectangle d'aire 15 cm^2 a pour des côtés de longueur 3 cm et 5 cm (l'antécédent de 15 par f est 5).

5. a) Géométrie 3 : $A = 3\text{cm} \times a$ avec a compris entre 2 cm et 7 cm. $A = y \text{ cm}^2$ et $a = x\text{cm}$, $x \in [2 ; 7] : y \text{ cm}^2 = 3\text{cm} \times x\text{cm} = 3x \text{ cm}^2$, $x \in [2 ; 7]$. Donc $y = 3x$, $x \in [2 ; 7]$.
Les élèves vont sûrement choisir le cm^2 et donc le cm.

b) Le modèle sera la fonction $x \mapsto 3x$ définie sur $[2 ; 7]$.

On obtient différentes restrictions de la fonction linéaire $x \mapsto 3x$ définie sur \mathbb{R} qui est donc le modèle à étudier en troisième.